

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**II/1/2020**



УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том II**  
**№1**  
**2020**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2020. — Том II. — Вип. №1. — 102 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №12 від 25.06.2020 р.**

---

**Адреса:**      редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

**E-mail:** mmm@ogasa.org.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2020

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., доц., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., в.о. завідувача відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., к.ф.-м.н., проф., декан факультету математики, фізики і інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpuyk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Ph.D., Professor, Dean of Mathematics, Physics and Information Technology Faculty, Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Applied Mathematics and Economic Cybernetics Department, Kherson State Agrarian University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskiy Viktor

---

## ЗМІСТ

<b>Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А.</b> О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров.....	6
<b>Лещенко Д. Д., Єршков С. В., Палій К. С.</b> Квазіоптимальне гальмування в середовищі з опором обертань гіростата з рухомою масою, з'єднаною з тілом демпфером з квадратичним тертям.....	20
<b>Онопрієнко О. Д., Комаров О. В., Лобода В. В.</b> Про вплив сил Максвелла на деформування міжфазної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі.....	29
<b>V. Kiosak, O. Lesechko</b> Geodesic mappings of spaces with special vector fields.....	45
<b>Фомін В. М., Фоміна І. П.</b> Застосування методу граничних елементів при дослідженні коливань залізобетонної колони змінного перерізу з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону.....	55
<b>P. Balduk, I. Korneeva, S. Neutov</b> Forced vibrations of arch systems in its plane.....	68
<b>Полєтаєв Г. С.</b> Про метод розв'язання абстрактних рівнянь з двома невідомими.....	81
<b>Гундина М. А.</b> Обзор функций <i>Wolfram Mathematica</i> , реалізующих сегментацію изображений.....	89

---

## CONTENT

<b>Yu. Kononov, V. Schevchenko, A. Lymar</b> On the vibrations of a rectangular plate in an ideal fluid with reference to various methods of attachment of its contours.....	6
<b>D. Leshchenko, S. Ershkov, E. Pali</b> Quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resistive medium.....	20
<b>O. Onopriienko, O. Komarov, V. Loboda</b> On the influence of Maxwell forces on the deformation of the interface crack in piezoelectric bi-material.....	29
<b>V. Kiosak, O. Lesechko</b> Geodesic mappings of spaces with special vector fields.....	45
<b>V. Fomin, I. Fomina</b> Application of the boundary element method in investigation of vibrations of a reinforced concrete column of variable cross-section taking into account the nonlinear and plastic properties of concrete.....	55
<b>P. Balduk, I. Korneeva, S. Neutov</b> Forced vibrations of arch systems in its plane.....	68
<b>G. Poletaev</b> About solving method of abstract equations with two unknowns .....	81
<b>M. Hundzina</b> Overview of <i>Wolfram Mathematica</i> functions implementing image segmentation.....	89

УДК 533.6.013.42

## О КОЛЕБАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЕЕ КОНТУРОВ

Кононов Ю. Н.<sup>1</sup>, Шевченко В. П.<sup>2</sup>, Лимарь А. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины

<sup>2</sup>Донецкий национальный университет имени Василя Стуса

<sup>3</sup>Николаевский аграрный университет

**Аннотация:** В линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности, а ее контуры могут иметь произвольное закрепление. Уравнения связанных плоских колебаний пластины и жидкости представлены в виде системы интегродифференциальных уравнений с условием сохранения объема несжимаемой жидкости и граничными условиями закрепления контуров пластины. При решении краевой задачи на собственные значения форма прогиба пластины представляется в виде суммы произведений четырех неизвестных констант на фундаментальные решения однородного уравнения для пластины без условий закрепления ее контуров и частного решения исходного неоднородного уравнения. Частное решение представляется в виде разложения по собственным функциям колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале. Все неизвестные величины, входящие в искомую форму прогиба пластины, выражаются через четыре неизвестные константы. Из условий закрепления контуров пластины следует однородная система линейных уравнений относительно четырех неизвестных констант. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что, как и ранее для защемленных контуров, частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты), но в отличие от защемленных контуров уже не может быть представлено в единой форме для этих частот. Для смешанных способов закреплений контуров пластины (защемленный – опертый, защемленный – свободный и опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

**Ключевые слова:** гидроупругость, упругая изотропная прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольный канал, плоские колебания.

## ON THE VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE IN AN IDEAL FLUID WITH REFERENCE TO VARIOUS METHODS OF ATTACHMENT OF ITS CONTOURS

Yu. Kononov<sup>1</sup>, V. Schevchenko<sup>2</sup>, A. Lymar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine

<sup>2</sup>Vasyl' Stus Donetsk National University

<sup>3</sup>Mykolayiv National Agrarian University

**Abstract:** A linear hydroelastic problem of oscillating a thin isotropic rectangular plate separating ideal incompressible fluids in a rectangular channel with rigid side walls and a rigid top and bottom is considered in the linear formulation. The plate is subject to tensile or compressive forces in





the middle surface, and its contours may have arbitrary fixing. The equations of plane coupled oscillations of a plate and a liquid are presented in the form of a system of integro-differential equations with boundary conditions for fixing the contours of the plate and the condition for maintaining the volume of an incompressible liquid. When solving the boundary value eigenvalue problem, the shape of the plate deflection is represented as the sum of the products of the four unknown constants by the fundamental solutions of the homogeneous equation for the plate without the conditions for fixing its contours and the particular solution of the original inhomogeneous equation. A particular solution is represented as an expansion in eigenfunctions of the oscillations of an ideal fluid in a rectangular channel. All unknown quantities included in the sought form of plate deflection are expressed through four unknown constants. From the conditions for fixing the contours of the plate, a homogeneous system of linear equations with respect to four unknown constants follows. The frequency equation of free coupled oscillations of a plate and a liquid is obtained in the form of a fourth-order determinant and its simplification is carried out for supported and free contours. It is shown that, as before for a clamped contours, the frequency equation splits into two equations describing asymmetric and symmetric frequencies of free vibrations (odd and even frequencies), but unlike a clamped contours it can no longer be presented in a single form for these frequencies. For mixed methods of fixing the contours of the plate (clamped - supported, clamped - free and supported - free), the frequency equation no longer splits into odd and even frequencies.

**Keywords:** hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Для безопасности транспортировки и хранения жидких грузов большие резервуары разделяют на отсеки. В этой связи возникает задача о влиянии упругих и массовых характеристик пластин, разделяющих жидкости, на частотный спектр и устойчивость колебаний механической системы. Наиболее актуальна эта проблема при работе и охлаждении ядерных реакторов. В статье рассмотрена модельная задача, когда отсек в виде жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью горизонтально разделяется изотропной прямоугольной пластиной на два отсека. В ранее рассмотренных работах рассмотрен и исследован случай защемленных контуров пластины. Однако в результате сейсмических воздействий или возникновении аварийной или нештатной ситуации края защемленной пластины могут принять произвольное закрепление, например, стать свободными, опертыми, или один контур может быть защемлен, а другой оперт или свободен. В этой связи возникает необходимость в исследовании нового частотного спектра и его влияния на работу насосных агрегатов. В данной статье на примере двух защемленных, опертых и свободных контуров, а также их различной комбинации выведены и аналитически исследованы полученные частотные уравнения.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В данной работе обобщаются результаты статьи [1] на случай произвольного закрепления контуров пластины. В статье [1] в линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании защемленной тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных совместных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот. Получены также приближенные и точные условия устойчивости совместных колебаний пластины и жидкости. В этой статье приведен достаточно полный обзор литературных данных по рассматриваемой проблеме. Дополним его только некоторыми основными и последними работами.

В работе [2] рассмотрена задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жестким, а другим упругим основаниями, а в [3] эта задача была обобщена на случай двух упругих оснований. В этих работах для защемленной пластины получены приближенные условия совместных колебаний пластины и жидкости, а в работе [4] удалось получить точные условия устойчивости, колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале. Статья [5] посвящена изучению свободных колебаний двухслойной идеальной жидкости в прямоугольном контейнере с упругой боковой стенкой. С использованием нормальных форм проведено исследование двумерной гидроупругой системы.

Большой цикл работ посвящен гидроупругим колебаниям идеальной жидкости в круговых и коаксиальных цилиндрах с жесткими и упругими основаниями. Это работы [6-10] и мн. др. В работе [6] исследованы связанные частот колебаний идеальной жидкости в круговом цилиндре и упругой пластины на свободной поверхности

жидкости. Рассмотрены различные случаи закрепления круговой пластины. Статья [7] посвящена колебаниям защемленной круговой пластины в сжимаемой идеальной жидкости, находящейся в жестком прямом круговом цилиндрическом резервуаре. В этой статье проводится сравнение аналитических результатов с результатами, полученными в системе ANSYS. В работе [8] проводятся исследования несимметричных свободных связанных колебаний защемленной круглой пластины при контакте с несжимаемой идеальной жидкостью. С использованием рядов Фурье – Бесселя и вариационного принципа выведена присоединенная масса жидкости и получено частотное уравнение связанных колебаний пластины и жидкости. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [7]. В статье [9] выведено частотное уравнение осесимметричных колебаний тяжелой двухслойной идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с упругими верхним и нижним основаниями в виде защемленных кольцевых пластин. Работа [10] посвящена исследованию частотных уравнений несимметричных и симметричных собственных колебаний тяжелой идеальной двухслойной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями в виде круговых защемленных пластин. На примере однородной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном в виде мембраны аналитически и численно исследован частотный спектр.

В данной статье продолжены исследования начатые в работах [1-4]. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров (защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

### 3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В линейной постановке рассмотреть модельную гидроупругую задачу о плоских колебаниях изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Вывести уравнения совместных колебаний пластины и жидкости для произвольного закрепления контуров пластины. Провести аналитические исследования частотного уравнения для двух опертых и двух свободных контуров, а также для различной комбинации способов закрепления двух контуров: защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный.

### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности  $\rho$  в жестком прямоугольном канале шириной  $b$  ( $b = 2a$ ). Пластина обладает постоянной изгибной жесткостью  $D$  и подвержена растягивающим ( $T > 0$ ) или сжимающим ( $T < 0$ ) усилиям интенсивности  $T$  в срединной поверхности. Контур пластины могут иметь произвольное закрепление. Верхняя жидкость заполняет сосуд до глубин  $h_1$ , а нижняя жидкость до глубины  $h_2$ .

Систему координат  $Oxyz$  расположим так, чтобы плоскость  $Oxy$  находилась на невозмущенной срединной поверхности пластины, ось  $Oy$  была направлена вдоль оси канала, а ось  $Oz$  – противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$ . Колебания пластины и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний упругой пластины и жидкости имеют вид, аналогичный [1-4]

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) + Q \text{ при } z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0; \quad (3)$$

$$(\mathcal{L}_{jp}[W])|_{\gamma_j} = 0 \quad (j, p = 1, 2); \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a W dx = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_2. \quad (7)$$

Здесь  $k_0 = \rho_0 h_0$ ;  $W(x, t)$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$  – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины;  $\Phi_i(x, z, t)$  – потенциал скоростей  $i$ -ой жидкости ( $i = 1, 2$ );  $Q$  – произвольная функция времени.  $\mathcal{L}_{j1}$  и  $\mathcal{L}_{j2}$  – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины на контуре  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ). Так, например, для наиболее интересного случая жесткого защемления пластины оператор  $\mathcal{L}_{j1}$  будет единичным, а  $\mathcal{L}_{j2} = d/dx$ . Для удобства записи введено обозначение контуров пластины через  $\gamma_j$  (индекс  $j = 1$  соответствует контуру  $x = -a$ , а  $j = 2 - x = a$ ).

Представим функции  $\Phi_i(x, z, t)$  в виде рядов Фурье по собственным функциям  $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t) e^{k_n z} + B_n(t) e^{-k_n z}] \psi_n(x) \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

где функции  $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$ , а соответствующие им собственные числа  $k_n = \pi n / 2a$ .

Представление функций  $\Phi_i(x, z, t)$  в виде (9) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций  $\psi_n$ , получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных  $A_{in}$ ,  $B_{in}$  и  $\dot{W}_n$ , которой имеет решение:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}; \\ A_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\kappa_{in} = h_i k_n$ ,

$$W_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W \psi_n dx, \quad N_n^2 = \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a. \quad (11)$$

С учетом соотношений (9)-(11) уравнение (1) примет вид

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q, \quad (12)$$

где

$$a_n = \rho(\coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}) = \rho \frac{\sinh \kappa_n}{\sinh \kappa_{1n} + \sinh \kappa_{2n}}, \quad \kappa_n = k_n (h_1 + h_2).$$

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

**Собственные частоты совместных колебаний упругой пластины и жидкости.**  
 Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой пластины и жидкости положим

$$W(x, t) = w(x) e^{i\omega t}, \quad Q = C_0 e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (11)-(12), в граничные условия (4) и условия (5), получим:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} - q w = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C; \quad (14)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx; \quad (15)$$

$$\int_{-a}^a w dx = 0; \quad (16)$$

$$(\mathcal{L}_{jp} w) \Big|_{\gamma_j} = 0, \quad (j, p = 1, 2). \quad (17)$$

Здесь  $P = T/D$ ,  $q = k_0 \omega^2 / D > 0$ ,  $C = C_0 / D$ .

Решение уравнения (14) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w = \sum_{k=1}^4 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \quad (18)$$

где  $w_k^0$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) фундаментальная система решений однородного уравнения



$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P \frac{d^2 w_k^0}{dx^2} - q w_k^0 = 0. \quad (19)$$

Здесь  $A_k^0$  и  $\tilde{C}_n$  и  $w_0$  неизвестные константы.

Подставив (18) в уравнение (14) и, воспользовавшись соотношениями

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = -k_n^2 \psi_n, \quad \frac{d^4 \psi_n}{dx^4} = k_n^4 \psi_n,$$

найдем константу  $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \quad (20)$$

где  $d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 - k_0 \omega^2$ .

Подставив (18) в (15) и, принимая во внимание (20), получим выражение для  $w_n$

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^4 A_k^0 E_{kn}^0. \quad (21)$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx. \quad (22)$$

С учетом (16), (20) и (21) окончательное выражение для формы прогиба пластины примет вид

$$w = \sum_{k=1}^4 \left( w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \psi_n \right) A_k^0, \quad (23)$$

где  $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx$ ,  $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$ ,  $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2$ ,

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = \frac{a_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}.$$

Фундаментальная система решений  $w_k^0$  ( $k = \overline{1,4}$ ) однородного уравнения (19) и коэффициенты  $E_{kn}^0$  запишутся так:

$$\begin{aligned} w_k^0 &= \{ \sinh \tilde{p}_1 x, \cosh \tilde{p}_1 x, \sin \tilde{p}_2 x, \cos \tilde{p}_2 x \}; \\ E_{1n}^0 &= \frac{\tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)} [(-1)^n - 1], \quad E_{2n}^0 = \frac{\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)} [(-1)^n + 1]; \\ E_{3n}^0 &= \frac{\tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)} [(-1)^n - 1], \quad E_{4n}^0 = \frac{\tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)} [(-1)^n + 1]. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\tilde{p}_{1,2}^2 = \pm P/2 + \sqrt{P^2/4 + q}$ ,  $\tilde{p}_i^* = a \tilde{p}_i$ .

В формулу (23) входит четыре неизвестные константы  $A_k^0$ . Из граничных условий закрепления пластины (17) имеем четыре линейных однородных уравнений относительно  $A_k^0$

$$\sum_{k=1}^4 \left( \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \right) A_k^0 = 0, \quad (p, j = 1, 2), \quad (25)$$

где

$$\mathcal{L}_{jpk}^0 = (\mathcal{L}_{jp} [w_k^0 - \tilde{w}_k^0])|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{jpn} = (\mathcal{L}_{jp} [\psi_n])|_{\gamma_j}. \quad (26)$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (25) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости [1]

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q,k=1}^4 \right| = 0. \quad (27)$$

Здесь

$$C_{pk} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j = 1; p = 1, 2; k = \overline{1, 4}),$$

$$C_{p+2,k} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j = 2; p = 1, 2; k = \overline{1, 4}). \quad (28)$$

Собственные формы колебаний будут найдены из формулы (23) и однородной системы (25).

Для проведения дальнейших аналитических исследований частотного уравнения (27) разложим функции  $w_k^0$  в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций  $\psi_n$ , воспользуемся условием  $\int_{-a}^a \psi_n dx = 0$  и обозначением (22). В этом уравнение (27) и коэффициенты (28) примут вид:

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q,k=1}^4 \right| = 0, \quad (29)$$

где

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j = 1, k = \overline{1, 4}),$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j = 2, k = \overline{1, 4}).$$

Здесь

$$\beta_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n d_n}.$$

В случае заземленных контуров коэффициенты частотного уравнения (29) запишутся так

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{12k}^0, \quad C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 (-1), \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (30)$$

так как величины  $\mathcal{L}_{jpn}$  и  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  имеют вид [1]



$$\mathcal{L}_{11n}=1, \mathcal{L}_{21n}=(-1)^n, \mathcal{L}_{j2n}=0, \mathcal{L}_{j2k}^0[w_k^0]=\left.\frac{dw_k^0}{dx}\right|_{\gamma_i}.$$

В работе [1] показано, что в этом случае уравнение (29) упрощается и может быть записано в единой форме для четных и нечетных частот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (31)$$

Проведем упрощения частотного уравнения (29) для защемленных, опертых, свободных и различных комбинаций этих трех случаев закреплений контуров пластины.

Для опертого края прогиб и изгибающий момент должны обращаться в нуль. Следовательно, операторы  $\mathcal{L}_{jp}$  и значения функций  $\mathcal{L}_{jpn}$ ,  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  для опертого края будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{j1} \equiv 1, \mathcal{L}_{j2} = \frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{L}_{11n} = 1, \mathcal{L}_{21n} = (-1)^n, \\ \mathcal{L}_{12n} = -k_n^2, \mathcal{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2, \mathcal{L}_{j2k}^0[w_k^0] = \frac{d^2 w_k^0}{dx^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для свободного края необходимо, чтобы момент и перерезывающая сила обращались в нуль. В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{j1} = \frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{L}_{j2} = \frac{d^3}{dx^3}, \mathcal{L}_{11n} = -k_n^2, \mathcal{L}_{21n} = (-1)^{n+1} k_n^2, \mathcal{L}_{12n} = 0, \mathcal{L}_{22n} = 0, \\ \mathcal{L}_{j1k}^0[w_k^0] = \frac{d^2 w_k^0}{dx^2}, \mathcal{L}_{j2k}^0[w_k^0] = \left.\frac{d^3 w_k^0}{dx^3}\right|_{\gamma_j}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений  $\omega_m^2$ , являющихся корнями частотного уравнения (27) или (29) с единственной предельной точкой на бесконечности.

**Упрощение частотного уравнения (29) в случае опертых контуров.** Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае опертых контуров. Коэффициенты  $C_{qk}$  этого уравнения согласно формул (32) запишутся так:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0; \\ C_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0; \\ C_{21} &= -\tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{22} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0; \\ C_{23} &= \tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{24} = -\tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0; \\ C_{31} &= -C_{11}, \quad C_{32} = C_{12}, \quad C_{33} = -C_{13}, \quad C_{34} = C_{14}; \\ C_{41} &= -C_{21}, \quad C_{42} = -C_{22}, \quad C_{43} = -C_{23}, \quad C_{44} = -C_{24}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\gamma_n = \omega^2 \alpha_n k_n^2$ .



Проводя преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (29) с коэффициентами (34), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение

$$(C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21})(C_{12}C_{24} - C_{14}C_{22}) = 0. \quad (35)$$

Из вида коэффициентами (34) следует, что уравнение (29) распадается на два уравнения (35), описывающих несимметричные и симметричные частоты.

**Упрощение частотного уравнения (29) в случае свободных контуров.** Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае свободных контуров. Коэффициенты  $C_{qk}$  этого уравнения, согласно формул (33), запишутся так:

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, & C_{12} &= \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{2,2m}^0; \\ C_{13} &= \tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, & C_{14} &= \tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{4,2m}^0; \\ C_{21} &= \tilde{p}_1^3 \cosh \tilde{p}_1^*, & C_{22} &= -\tilde{p}_1^3 \sinh \tilde{p}_1^*; \\ C_{23} &= -\tilde{p}_2^3 \cos \tilde{p}_2^*, & C_{24} &= -\tilde{p}_2^3 \sin \tilde{p}_2^*; \\ C_{31} &= -C_{11}, & C_{32} &= C_{12}, & C_{33} &= -C_{13}, & C_{34} &= C_{14}; \\ C_{41} &= C_{21}, & C_{42} &= -C_{22}, & C_{43} &= C_{23}, & C_{44} &= -C_{24}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $\delta_n = \beta_n k_n^2$ .

Проводя, как и ранее, преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (29) с коэффициентами (36), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение

$$(C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21})(C_{12}C_{24} - C_{14}C_{22}) = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) по виду совпадает с уравнением (35) и из него следует, что уравнение (29) в случае двух свободных контуров также распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Таким образом, как и в случае опертых контуров, так и в случае свободных контуров частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты совместных колебаний пластины и жидкости.

**Частотное уравнение (29) в случае одного заземленного, а другого опертого контура.** Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет заземлен, например, контур  $x = -a$  ( $j=1$ ), а второй контур  $x = a$  ( $j=2$ ) – оперт. Коэффициенты  $C_{qk}$  согласно формул (30) и (32) запишутся так:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, & C_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0; \\ C_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, & C_{14} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m-1}^0; \\ C_{21} &= \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*, & C_{22} &= -\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*; \\ C_{23} &= \tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^*, & C_{24} &= \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^*; \\ C_{31} &= -C_{11}, & C_{32} &= C_{12}, & C_{33} &= -C_{13}, & C_{34} &= C_{14}; \end{aligned}$$



$$C_{41} = \tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{42} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{43} = -\tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{44} = -\tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) незначительно упрощается, но не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится более сложным и требует дальнейших численных исследований.

**Частотное уравнение (29) в случае одного заземленного, а другого свободного контура.** Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет заземлен, например, контур  $x = -a$  ( $j = 1$ ), а второй контур  $x = a$  ( $j = 2$ ) – свободен. Коэффициенты  $C_{qk}$  согласно формул (30) и (33) запишутся так:

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{21} = \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*, \quad C_{22} = -\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*, \quad C_{23} = \tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^*, \quad C_{24} = \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^*;$$

$$C_{31} = \tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{32} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{33} = -\tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{34} = -\tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{41} = \tilde{p}_1^2 C_{21}, \quad C_{42} = -\tilde{p}_1^2 C_{22}, \quad C_{43} = -\tilde{p}_2^2 C_{23}, \quad C_{44} = \tilde{p}_2^2 C_{24}.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) незначительно упрощается, но не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится более сложным и требует дальнейших численных исследований.

**Частотное уравнение в случае одного опертого, а другого свободного контура.** Проведем упрощение частотного уравнения (29) в случае, когда один из контуров будет оперт, например, контур  $x = -a$  ( $j = 1$ ), а второй контур  $x = a$  ( $j = 2$ ) – свободен. Коэффициенты  $C_{qk}$  согласно формул (32) и (33) запишутся так:

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{21} = -\tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{22} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{23} = \tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{24} = \tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{31} = \tilde{p}_1^2 \sinh \tilde{p}_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{32} = \tilde{p}_1^2 \cosh \tilde{p}_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{2,2m}^0;$$

$$C_{33} = -\tilde{p}_2^2 \sin \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{34} = -\tilde{p}_2^2 \cos \tilde{p}_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{41} = \tilde{p}_1^3 \cosh \tilde{p}_1^*, \quad C_{42} = \tilde{p}_1^3 \sinh \tilde{p}_1^*, \quad C_{43} = -\tilde{p}_2^3 \cos \tilde{p}_2^*, \quad C_{44} = \tilde{p}_2^3 \sin \tilde{p}_2^*.$$

В этом случае определитель частотного уравнения (29) не упрощается и не распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные частоты, т.е частотный спектр становится еще более сложным, чем в предыдущем случае.

## 5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

Совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости (27) представлено в виде определителя четвертого порядка. Воспользовавшись разложением фундаментальной системы в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале, удалось упростить частотное уравнение и представить его в виде (29) и провести его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров (защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный) частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты. Наиболее сложный вид для аналитических исследований частотное уравнение имеет в случае, когда один контур опертый, а другой свободный. Во всех смешанных способов закреплений контуров необходимо использовать численные исследования полученных частотных уравнений.

## 6 ВЫВОДЫ

В линейной постановке рассмотрена гидроупругая задача о плоских колебаниях изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина имеет произвольное закрепление контуров и подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Выведено интегро-дифференциальное уравнение связанных колебаний пластины и жидкости. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных связанных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение для опертых и свободных контуров. Показано, что для двух опертых или свободных контуров оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты, а для смешанных способов закреплений двух контуров: защемленный – опертый, защемленный – свободный, опертый – свободный частотное уравнение уже не распадается на нечетные и четные частоты.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

## Литература

1. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // Механика та математичні методи. – 2019. – Том 1. – Вип. 2. – С. 6–17.
2. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць. – 2017. – Вип. 26. – С. 79–96.
3. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 190–204.
4. Kononov Yu. N., Lymar A. A. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2018. – Vol. 06, Issue 1. – P. 1755–1760.
5. Amaouche M., Meziani B. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids / M. Amaouche, B. Meziani // Meccanica. – 2012. – 47. – P. 71–83.  
[doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4](https://doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4)
6. Bauer H. F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover / H. F. Bauer // J. Sound Vib. – 1995. – 180, № 5. – P. 689–704.  
[doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109)
7. Jeong K.-H., Kim K.-J. Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid / K.-H. Jeong, K.-J. Kim // J. Sound Vib. – 2005. – 283. – P. 153–172.  
[doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029)
8. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid / S. Tariverdilo, M. Shahmardani, J. Mirzapour, R. Shabani // Appl. Math. Model. – 2013. – 37, № 1-2. – P. 228–239.  
[doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025)
9. Kononov Yu. M., Shevchenko V. P., Dzhukha Yu. O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel / Yu. M. Kononov, V. P. Shevchenko, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. – 2019, Vol. 240, №. 1, July. – P. 98–112. [doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2](https://doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2)
10. Kononov Yu. M., Dzhukha Yu. O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases / Yu. M. Kononov, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 246, №. 3, April. – P. 365–383. [doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w)

## References

1. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Lymar, A. A. (2019). Ob ustojchivosti kolebaniya pryamougol'noj plastiny v ideal'noj zhidkosti. Mekhanika ta matematichi metody. 1 (2), 6–17.
2. Kononov, Yu. N., Lymar, A. A. (2017). O kolebanii pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruktsiy : zbirnik naukovikh prats', 26, 79–96.
3. Kononov, Yu. N., Lymar, A. A. (2017). Kolebaniya pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s uprugimi osnovaniami. Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, 1, 190–204.
4. Kononov, Yu. N., Lymar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology, 06 (1), 1755–1760.
5. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica, 47, 71–83. [doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4](https://doi.org/10.1007/s11012-010-9419-4)
6. Bauer, H. F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. J. Sound Vib., 180 (5), 689–704. [doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0109)

7. Jeong, K.-H., Kim, K.-J. (2005). Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. *J. Sound Vib.*, 283, 153–172. [doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.029)
8. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model.*, 37 (1-2), 228–239. [doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025](https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025)
9. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel // *Journal of Mathematical Sciences*, 240 (1), 98–112. [doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2](https://doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2)
10. Kononov, Yu. M., Dzhukha, Yu. O. (2020). Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. *Journal of Mathematical Sciences*, 246, (3) 365–383. [doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w)

**Кононов Юрий Никитович**

Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук,  
д.ф.-м.н., профессор  
ул. Добровольского, 1, Славянск, Україна 84100  
kononov\_yuriy.nikitovich@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1609-0253

**Шевченко Владимир Павлович**

Донецкий национальный университет имени Василя Стуса,  
д.ф.-м.н., академик НАН Украины, профессор  
ул. 600-лет, 21, Винница, Україна 21021  
v.shevchenko@donnu.edu.ua  
ORCID: 0000-0001-7092-0492

**Лимарь Александр Александрович**

Николаевский аграрный университет, к.ф.-м.н, ассистент,  
ул. Георгия Гонгадзе, 9, Николаев, Украина 54020  
aleksandr1402a@mail.ru,  
ORCID: 0000-0002-0301-7313

*Для посилань:*

Кононов Ю. Н. О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // *Механіка та математичні методи*. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 6–19.

*For references:*

Kononov, Yu., Schevchenko, V., Lyumar, A. (2020). On the vibrations of a rectangular plate in an ideal fluid with reference to various methods of attachment of its contours. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (1), 6–19.

УДК 62-50

## КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ ГАЛЬМУВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ОБЕРТАНЬ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ, З'ЄДНАНОЮ З ТІЛОМ ДЕМПФЕРОМ З КВАДРАТИЧНИМ ТЕРТЯМ

Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Єршков С. В.<sup>2</sup>, Палій К. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

<sup>2</sup>Державний астрономічний інститут ім. М.Д. Штернберга МДУ

**Анотація:** Аналіз об'єктів, які вміщують елементи з розподіленими та зосередженими параметрами, представляє інтерес у теоретичному та прикладному аспектах. Природний розвиток досліджень задач динаміки та керування рухом твердих тіл навколо нерухої точки полягає в урахуванні тієї обставини, що тіла не є абсолютно твердими, а в деякому розумінні є близькими до вказаних ідеальних моделей. Необхідність аналізу впливу різних неідеальностей обумовлена зростанням вимог до точності розв'язування практичних задач космонавтики, гіроскопії та ін. Вплив неідеальностей може бути виявлений на основі асимптотичних методів нелінійної механіки (сингулярних збурень, усереднення та ін.). Він зводиться до наявності доданків у рівняннях Ейлера для деякого фіктивного твердого тіла.

Раніше задачі оптимальної стабілізації (або гальмування) твердого тіла розглядалися при різних припущеннях відносно динамічних характеристик цих тіл, систем керування (обмежень на керуючий момент) і для різних критеріїв якості (швидкодії, витрати робочого тіла та ін.)

Досліджується задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості (для малих чисел Рейнольдса). Великий інтерес до задач про рух твердих тіл з порожнинами, які містять рідину, виник у зв'язку з розвитком ракетної та космічної техніки. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, які вміщують в'язку рідину, представляють більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини. Крім того, тіло з'єднано в точці на осі симетрії з масою відносно малих розмірів за допомогою пружної в'язі з квадратичною дисипацією. Наявність рухомої маси моделює присутність нежорстко закріплених елементів на космічному апараті, що чинить суттєвий вплив на його рух відносно центра мас. На тверде тіло діє також дисипативний момент сил лінійного опору середовища.

Задача синтезу квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного тіла в середовищі з опором досліджена аналітично та чисельно. Було проведено асимптотичне розв'язування на основі процедури усереднення по фазі незбуреного прецесійного руху. Визначені якісні властивості квазіоптимального руху, наведені графіки.

**Ключові слова:** квазіоптимальне гальмування, в'язка рідина, рухома маса, середовище з опором, усереднення.

## QUASI-OPTIMAL DECELERATION OF ROTATIONS OF A GYROSTAT WITH A MOVING MASS COUPLED TO IT THROUGH A QUADRATIC FRICTION DAMPER IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko<sup>1</sup>, S. Ershkov<sup>2</sup>, E. Palii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

<sup>2</sup>Sternberg Astronomical Institute MSU



**Abstract:** The analysis of objects containing elements with distributed and lumped parameters is of interest both for theory and applications.

The development of research in dynamics and control of rigid bodies moving about a fixed point implies that the bodies are not absolutely rigid but are rather close to ideal models. The need for the analysis of the influence of various deviations from perfectness is caused by growing accuracy requirements in space exploration, gyroscopy, etc. The effect of nonidealities can be analyzed by singular perturbation methods, averaging or other asymptotic methods of nonlinear mechanics. This influence reduced to the presence of additional perturbation torques in Euler's dynamic equations for a fictitious rigid body.

In this part the problem addresses of the time-optimal deceleration of rotations of a dynamically symmetric rigid body under a small control torque in the ellipsoidal domain with close unequal values of the ellipsoid's semiaxes. The problem is considered as a problem of a quasi-optimal control. It is assumed that the body contains a spherical cavity filled with a highly viscous fluid (at small Reynolds numbers).

A great interest to the problem of rotation of rigid bodies with fluid-containing cavities has arisen in connection with the development in the rocket and space technology. The problems of dynamics of rigid bodies with cavities, containing a viscous fluid, are significantly more difficult than in the case of ideal fluid. The body is assumed to have a moving mass connected to it through elastic coupling with quadratic dissipation. The situation simulates the presence of loosely fixed components on a spacecraft, having a significant influence on its motion relative to the center of mass.

In addition, the body is affected by a small medium resistance torque that is proportional to the angular momentum. The problem synthesizing the quasi-optimal deceleration of a dynamically symmetric body rotations in a resistive medium is investigated analytically and numerically. An asymptotic solution based on the procedure of averaging the unperturbed precession motion over the phase is performed. The qualitative properties of quasi-optimal motion are analyzed and the corresponding graphs are presented.

**Keywords:** Quasi-optimal deceleration, viscous fluid, moving mass, resisting medium, averaging.

## 1 ВСТУП

Розглядається задача квазіоптимального (близького до оптимального) за швидкістю гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. До точки на осі симетрії тіла прикріплена рухома точкова маса. Вважається, що при відносному русі на точку діє поворотальна пружна сила і сила опору, яка пропорційна квадрату швидкості (квадратичне тертя). На тіло також діє гальмуючий момент сил лінійного опору середовища.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідженню руху твердих тіл з внутрішніми ступенями вільності присвячено ряд робіт (див., наприклад, [1-6]). Вивчення некерованих рухів твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, було проведено в роботах [2, 3, 6, 9, 10]. Аналізу пасивних рухів твердого тіла в середовищі з опором приділялася увага в [3, 6, 11-14]. Значна кількість робіт присвячена дослідженню руху твердого тіла з рухомими внутрішніми масами [1, 3, 4, 7, 8, 15, 16]. Проблема керування обертаннями квазітвердих тіл за допомогою зосереджених моментів сил, що мають значення для застосувань, менш досліджена [5, 6, 17-19].

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліджується задача про квазіоптимальне (близьке до оптимального) гальмування обертань в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла. Розглядаються керовані обертання динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса. До точки на осі симетрії тіла прикріплена рухома точкова маса відносно малих лінійних розмірів. Вважається, що при відносному русі на точку діє поворотальна пружна сила і сила опору, яка пропорційна квадрату швидкості (квадратичне тертя). На тверде тіло діє також дисипативний момент сил лінійного опору середовища. На основі підходу [5] асимптотично наближені рівняння керованих обертальних рухів в системі координат, зв'язаній з тілом (динамічні рівняння Ейлера), записуються у вигляді:

$$\mathbf{G} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^p + \mathbf{M}^v + \mathbf{M}^r. \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{M}^u$  – вектор керуючого зовнішнього реактивного моменту сил,  $\mathbf{M}^p$  – вектор внутрішнього збудуючого моменту сил, обумовлений наявністю в'язкої рідини в порожнині тіла,  $\mathbf{M}^v$  – вектор внутрішнього збудуючого моменту сил, обумовлений пружністю і квадратичним тертям демфера,  $\mathbf{M}^r$  – момент сил дисипації (опору середовища). Вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$  – кінетичний момент тіла,  $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1 A_2 A_3)$  – сталий симетричний тензор інерції незбуреного тіла, зведений до головних осей,  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$  – вектор кутової швидкості, представлений його проекціями на зв'язані осі. Модуль кінетичного моменту тіла має вигляд

$$G = |\mathbf{G}| = [A_1^2(p^2 + q^2) + A_3^2 r^2]^{1/2} \equiv [A_1^2 \omega_{\perp}^2 + A_3^2 r^2]^{1/2},$$

$$A_1 \neq A_3, \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2.$$

Опишемо структуру керуючого впливу. Величина керуючого моменту сил  $\mathbf{M}^u$  передбачається малою порядку  $\varepsilon$ , де  $\varepsilon \ll 1$  – малий безрозмірний параметр. Компоненти керуючих моментів представлені у вигляді добутоків  $\varepsilon b_i u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  [5, 20]:



$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, u_i = -G_i G^{-1}, i = 1, 2, 3 \quad |u| \leq 1. \quad (2)$$

Тут сталі вирази  $b_i$  мають розмірність моменту сили і досить близькі,  $u_i$  – безрозмірні керуючі функції, які підлягають визначенню.

Для спрощення розв’язування задачі оптимального керування в систему (1) вноситься структурне обмеження. Вважається, що момент сил опору середовища малий і пропорційний кінетичному моменту тіла [3, 6, 11, 12, 17-19]

$$M^r = -\varepsilon \lambda J \omega, \quad (3)$$

де  $\lambda$  – деякий сталий коефіцієнт пропорційності, який визначається властивостями середовища і формою тіла, а також має розмірність кутової швидкості.

З урахуванням (2), (3) наближена система рівнянь керованого руху (1) в проекціях на головні осі інерції тіла має вигляд [2-6, 11, 12]:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= -\varepsilon b_1 A_1 p G^{-1} + Lpr^2 + FG^2 qr + Spr^6 \omega_{\perp} - \varepsilon \lambda A_1 p; \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= -\varepsilon b_2 A_1 q G^{-1} + Lqr^2 - FG^2 pr + Sqr^6 \omega_{\perp} - \varepsilon \lambda A_1 q; \\ A_3 \dot{r} &= -\varepsilon b_3 A_3 r G^{-1} + H(p^2 + q^2)r - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_{\perp}^3 - \varepsilon \lambda A_3 r; \\ 0 < A_3 &\leq 2A_1, A_3 \neq A_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що при рівності коефіцієнтів  $b_1 = b_2 = b_3 = b$  ( $b > 0$ ), де параметр  $b$  може бути функцією часу, керування (2) є оптимальним. Цією властивістю пояснюється припущення про близькість  $b_i$  та введення терміну «квазіоптимальне керування» [5, 20].

Коефіцієнти  $F, S, H, L$  в (4) виражаються через параметри системи таким чином [2-5]:

$$\begin{aligned} F &= m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \quad S = m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} d |d| A_1^{-4} A_3^4, \quad d = 1 - A_3 A_1^{-1}; \\ H &= \beta P_0 \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1), \quad L = \beta P_0 \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Введені в (5) позначення характеризують моменти сил, які обумовлені наявністю пружного елемента. Тут  $m$  – маса рухомої точки,  $\rho$  – радіус-вектор точки кріплення рухомої маси, що знаходиться на осі динамічної симетрії даного тіла,  $\rho = |\rho|$ . Сталі  $\Omega^2 = c/m$ ,  $\lambda_1 = \mu/m = \Lambda \Omega^3$ ,  $\Omega \gg \omega_0$  визначають частоту коливань та швидкість їх згасання відповідно;  $c$  – жорсткість,  $\mu$  – коефіцієнт квадратичного тертя,  $\omega_0$  – модуль початкового значення вектора кутової швидкості.

Нерівність  $\Omega \gg \omega_0$  дозволяє ввести малий параметр у виразах  $F, S$  (5) і вважати відповідні збурюючі моменти малими з метою застосування методу усереднення. Коефіцієнти  $H, L$  в (5) визначають момент сил, обумовлений рухами сильно в’язкої рідини в порожнині тіла,  $\beta$  – густина рідини,  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в’язкості,  $P_0$  – коефіцієнт, які залежить від форми порожнини. У разі сферичної порожнини радіуса  $d$  він дорівнює  $P_0 = 8\pi d^7 / 525$  [2, 3]. Основним є припущення про малість числа  $Re \sim \varepsilon \ll 1$ .

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Спочатку виберемо момент інерції твердого тіла відносно осі  $x_1 - A_1 = A_2$  та величину

$\omega_0$  порядку початкової швидкості в якості характерних параметрів задачі. Введемо  $\tau = \omega_0 t$  – безрозмірний час та безрозмірні коефіцієнти інерції  $\tilde{A}_i = A_i/A_1$ .

Система (4) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -(\tilde{A}_3 - 1)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_1\tilde{p}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{p}\tilde{r}^2 + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{p}\tilde{r}^6(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p}; \\ \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= (\tilde{A}_3 - 1)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_2\tilde{q}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{q}\tilde{r}^2 - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{q}\tilde{r}^6(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q}; \\ \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\varepsilon\tilde{b}_3\tilde{r}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{H}(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)\tilde{r} - \varepsilon\tilde{A}_3^{-2}\tilde{S}\tilde{r}^5(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{3/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут з урахуванням зроблених припущень введені позначення:

$$\begin{aligned} \varepsilon\tilde{F} &= m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2, \quad \varepsilon\tilde{S} = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}(1 - \tilde{A}_3)|1 - \tilde{A}_3|A_1^{-1}\tilde{A}_3^4\omega_0^6; \\ \varepsilon\tilde{L} &= \beta P_0\nu^{-1}A_1^{-1}\tilde{A}_3(1 - \tilde{A}_3)\omega_0, \quad \varepsilon\tilde{H} = \beta P_0\nu^{-1}\tilde{A}_3^{-1}(\tilde{A}_3 - 1)A_1^{-1}\omega_0; \\ \tilde{b}_i &= b_i/A_1\omega_0^2, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/\omega_0, \quad \tilde{G} = G/A_1\omega_0, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1. \end{aligned}$$

Надалі, при використанні безрозмірних змінних, будемо опускати знак «~».

Використовуємо загальний породжувальний розв'язок системи (6) при  $\varepsilon = 0$

$$p = a \cos \psi, \quad q = a \sin \psi, \quad a > 0, \quad r = \text{const} \neq 0, \quad (7)$$

де  $\psi = (A_3 - 1)r\tau + \psi_0$  – фаза коливань екваторіальної складової вектора кутової швидкості.

Підставляючи (7) у третє рівняння системи (6) та враховуючи вирази  $a^2 = p^2 + q^2$  та  $\dot{a} = \dot{p} \cos \psi + \dot{q} \sin \psi$ , усереднимо одержану систему рівнянь для  $a$  і  $r$  по фазі  $\psi$ . Після введення повільного аргументу  $\theta = \varepsilon\tau$  та усереднення система приймає вигляд ( $' = d/d\theta$ ):

$$\begin{aligned} a' &= -a[G^{-1}(b_1 + b_2)/2 - Lr^2 - Sr^6a + \lambda]; \\ r' &= -r(b_3G^{-1} - Ha^2 + A_3^{-2}Sr^4a^3 + \lambda). \end{aligned} \quad (8)$$

Середнє виразів, що містять множник  $F$ , дорівнює нулю. При  $b_1 = b_2 = b_3 = b$  рівняння для  $a$  і  $r$  інтегруються повністю і ця задача оптимального керування розв'язана аналітично в [6].

Дослідимо окремий випадок

$$0,5(b_1 + b_2) = b_3 = b. \quad (9)$$

Помножимо перше рівняння (6) на  $p$ , друге – на  $q$ , третє – на  $A_3^2r$  та складемо їх. Проведемо усереднення та одержимо наступне рівняння

$$G' = -b - \lambda G$$

Враховуючи початкову  $G(\theta_0) = G^0$  та кінцеву умови  $G(T, \theta_0, G^0) = 0$ ,  $T = T(\theta_0, G^0)$

після інтегрування одержимо

$$G(\theta) = -\frac{b}{\lambda} + \left(G^0 + \frac{b}{\lambda}\right) \exp(-\lambda\theta), \quad \Theta = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1\right).$$

Зауважимо, що величина  $\Theta \rightarrow \infty$  коли  $G^0/b \rightarrow \infty$  для різних  $\lambda$ ; в свою чергу  $\Theta \rightarrow 0$  при  $G^0 \lambda/b \rightarrow 0$  ( $\lambda$  – будь-яке) або коли  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Для системи (8) за умови (9) проведемо заміну змінних:  $r = \eta G$ ,  $a = \alpha G$  та поділимо перше рівняння системи (8) на друге. Одержимо рівняння вигляду

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{\eta(L + SG^5\alpha\eta^4)}{\alpha(H - A_3^2 SG^5\alpha\eta^4)}. \quad (10)$$

Розв'язок цього рівняння (10) може бути знайдений чисельно.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для розв'язування системи (8) були проведені чисельні дослідження при різних початкових умовах та параметрах задачі. Перенормовані величини в початковий момент мають значення  $\omega_0 = 1$ ;  $A_2 = 1,2$ ;  $A_3 = 1,5$  відповідно, а також коефіцієнти керуючого моменту  $b_1 = 0,1625$ ;  $b_2 = 0,1$ ;  $b_3 = 0,15$ , для яких має місце співвідношення  $0,5(b_1 + b_2) \neq b_3$ . Розглянуті два випадки, які відповідають початковим умовам:

$$a_0 = 0,35; \quad (11)$$

$$a_0 = 0,626. \quad (12)$$

Кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії визначається за формулою  $r_0 = (\omega_0 - a_0^2)^{1/2}$  коли  $\omega_0 = 1$ . Розрахунки виконувалися для двох значень перенормованого коефіцієнта опору  $\lambda = 0,2$ ;  $0,5$  та коефіцієнтів  $S = 0,5$ ;  $0,8$   $H = 0,5$ ;  $0,8$ ;  $L = -0,72$ ;  $-1,152$ . Параметри були вибрані таким чином, щоб задовольнити умовам:  $A_3 \leq 2$ ,  $a_0 < r_0$ . Для побудови графіка модуля кінетичного моменту був використаний вираз  $G = |\mathbf{G}| = (a^2 + A_3^2 r^2)^{1/2}$ . На рис. 1–4 зображені однотипні за формою графіки зміни функцій  $a$ ,  $r$  и  $G$ , які одержані в результаті чисельного інтегрування.

Графіки функцій  $a$ ,  $r$ ,  $G$ , які відповідають значенням  $\lambda = 0,2$  та початковим умовам (11), представлені на рис. 1 та 2. При різних значеннях коефіцієнтів  $S$  та  $H$  час гальмування дорівнює  $T \approx 4,75$ , але при збільшенні коефіцієнтів  $S$  та  $H$  графік функції  $a(\theta)$  більш вигнутий (рис. 2).

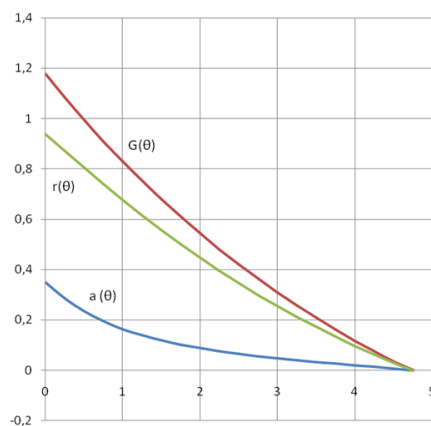


Рис. 1.  $\lambda = 0,2$ ;  $S = 0,5$ ;  $H = 0,5$

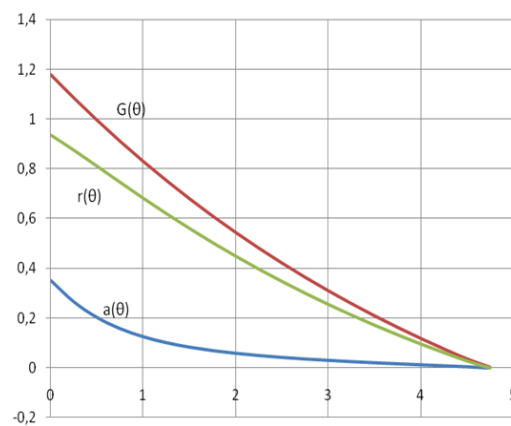


Рис. 2.  $\lambda = 0,2$ ;  $S = 0,8$ ;  $H = 0,8$

Результат чисельного інтегрування системи (4) при початкових значеннях (12) та

$\lambda = 0,5$  представлений на рис. 3, 4. В цьому розрахунковому випадку  $T \approx 3,51$ . Як можна побачити з рисунків, збільшення коефіцієнтів моментів сил, обумовлених наявністю пружного елемента та в'язкої рідини в порожнині тіла, викликає зміну характеру спадання  $a(\theta)$ .

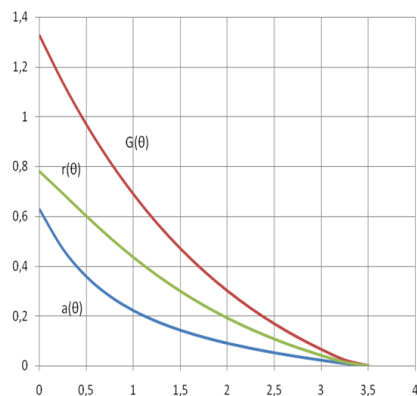


Рис. 3.  $\lambda = 0,5; S = 0,5; H = 0,5$

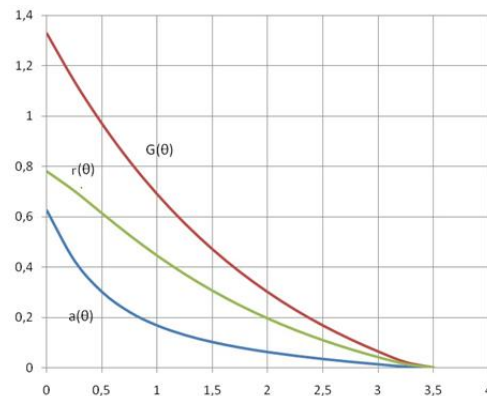


Рис. 4.  $\lambda = 0,5; S = 0,8; H = 0,8$

З графіків бачимо, що на величину часу гальмування  $T$  впливають значення коефіцієнта опору  $\lambda$ , при збільшенні якого гальмування твердого тіла відбувається швидше, а також коефіцієнта  $A_3$ . Вплив початкових значень  $a$  та  $r$  на час гальмування незначний. Поведінка змінних  $a, r, G$  носить монотонний характер. Таким чином, задача квазіоптимального гальмування розв'язана.

## 6 ВИСНОВКИ

Досліджена задача квазіоптимального за швидкістю гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, і рухомою масою, яка з'єднана з тілом демпфером з квадратичною дисипацією, в середовищі з опором. В рамках асимптотичного підходу одержана усереднена система рівнянь, визначено час швидкодії  $T \approx 4,75$  и  $T \approx 3,51$  для прийнятих чисельних значень безрозмірних параметрів. Побудовані графіки зміни кінетичного моменту тіла  $G$  і величин  $a, r$  – екваторіальної та осьової компонент вектора кутової швидкості квазітвердого тіла.

## Литература

1. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными массами / Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.-1973.-№4.-С.33-44.
2. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid / F. L. Chernousko //.-Washington: NASA, 1972.-204p.
3. Chernousko F. L. Evolution of Rotations of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko // Cham: Springer, 2017.-241p. [doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7)
4. Akulenko L. D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko// Mech. Solids, - 1978.-13(5).-P.24-28.
5. Akulenko L. D. Problems and Methods of Optimal Control / L. D. Akulenko // Kluwer.-Dordrecht-Boston-London, 1994.-360p.
6. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич // Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова-О.: ОНУ, 2013.-288с.
7. Yehia H. M. New integrable problems of motion of a rigid body with a particle oscillating or bouncing in it / H. M. Yehia // Mechanics Research Communications.- 1997.-24(3).- P.243-246.

- [doi.org/10.1016/S0093-6413\(97\)00020-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(97)00020-7)
8. Miller A. J. Nonlinear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping, and moving internal submasses / A. J. Miller, G. L. Gray, A. P. Mazzoleni // *J. Guid. Contr. Dyn.*-2001.-24 (3).-P.605 -615. [doi.org/10.2514/2.4752](https://doi.org/10.2514/2.4752)
  9. Disser K. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid / K. Disser, G. R. Galdi, G. Mazzone, P. Zunino // *Arch. Rational Mech. Anal.*-2016.-221(1).-P.487-526. [doi.org/10.1007/500205-016-0966-2](https://doi.org/10.1007/500205-016-0966-2)
  10. Ramodanov S. M. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid / S. M. Ramodanov, V. V. Sidorenko // *Int. J. Non-linear Mech.*-2017.-95.-P.42-46. [doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006](https://doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006)
  11. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В. Н. Кошляков // М.: Наука, 1985. 288с.
  12. Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II / E. J. Routh // New York: Dover Publications, 1955.
  13. Akulenko L. D. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko, F. L. Chernousko // *J. Appl. Math. Mech.*-1979.-43(5).P. 829-837. [doi.org/10.1016/0021-8928\(79\)90171-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90171-0)
  14. Ershkov S. V. Solving procedure for the Kelvin–Kirchhoff equations in case of buoyant (or the falling) ellipsoid of rotation / S. V. Ershkov, D. D. Leshchenko, A. R. Giniyatullin // *European J. Mechanics/ B Fluids.*-2020.-81.-P.23-27. [doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001)
  15. El-Gohary A. On the control of programmed motion of a rigid body containing moving masses / A. El-Gohary // *Int. J. Non-linear Mech.*-2000.-35(1).-P.27-35 [doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00084-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00084-5)
  16. Li Jianqing. Survey on moving mass control technology / Jianqing Li, Changsheng Gao, Chaoyong Li, Wuxing Jing // *Aerosp. Sci. Technol.*-2018.-82-83.-P.594-606. [doi.org/10.1016/j.ast.09.033](https://doi.org/10.1016/j.ast.09.033)
  17. Akulenko L. D. Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko, Yu. S. Shchetinina // *J Comput. Syst. Sci. Int.*-2017.-56(2).-P.186-191. [doi.org/10.1134/S10642307020022](https://doi.org/10.1134/S10642307020022)
  18. Akulenko L. D. Quasi-optimal braking of rotations of a body with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resisting medium / L. D. Akulenko, T. A. Kozachenko, D. D. Leshchenko // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*-2018.-57(5).-P.689-694. [doi.org/10.1134/S1064230718050027](https://doi.org/10.1134/S1064230718050027)
  19. Akulenko L. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with a moving mass in a resistive medium / L. D. Akulenko, T. A. Kozachenko, D. D. Leshchenko // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*-2019.-58(5).-P. 667-673. [doi.org/10.1134/S1064230719050022](https://doi.org/10.1134/S1064230719050022)
  20. Черноуцько Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноуцько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов // М.: Наука, 1980.-384с.

## References

1. Chernousko, F. L. (1973). On the motion of a rigid body with moving internal masses. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela.*, 4, 33-44. [in Russian].
2. Chernousko, F. L. (1972). *The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid.* Washington: NASA, 204.
3. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Rotations of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 241. [doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7)
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mech. Solids.*, 13(5), 24-28.
5. Akulenko, L. D. (1994). *Problems and Methods of Optimal Control.* Kluwer.-Dordrecht-Boston-London, 360.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Ya. S. (2013). Perturbed and Controlled Rotations of a Rigid Body. Odessa: I.I. Mechnikov Odessa Nation. Univ., 288. [in Russian].
7. Yehia, H. M. (1997). New integrable problems of motion of a rigid body with a particle oscillating or bouncing in it. *Mechanics Research Communications*, 24(3), 243-246.



- [doi.org/10.1016/S0093-6413\(97\)00020-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(97)00020-7)
8. Miller, A. J., Gray, G. L., Mazzoleni, A. P. (2001). Nonlinear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping, and moving internal submasses. *J. Guid.Contr.Dyn.*, 24 (3), 605 -615. [doi.org/10.2514/2.4752](https://doi.org/10.2514/2.4752)
  9. Disser, K., Galdi, G. R., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 221(1), 487-526. [doi.org/10.1007/500205-016-0966-2](https://doi.org/10.1007/500205-016-0966-2)
  10. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *Int. J. Non-linear Mech.*, 95, 42–46. [doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006](https://doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006)
  11. Koshlyakov, V. N. (1985). *Problems in Dynamics of a Solid Bodies and Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods*. Moscow: Nauka, 288. [in Russian]
  12. Routh, E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications.
  13. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *J. Appl. Math. Mech.*, 43(5), 829-837. [doi.org/10.1016/0021-8928\(79\)90171-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90171-0)
  14. Ershkov, S. V., Leshchenko, D. D., Giniyatullin, A. R. (2020). Solving procedure for the Kelvin–Kirchhoff equations in case of buoyant (or the falling) ellipsoid of rotation. *European J. Mechanics/ B Fluids.*, 81, 23-27. [doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001)
  15. El-Gohary, A. (2000). On the control of programmed motion of a rigid body containing moving masses. *Int. J. Non-linear Mech.*, 35(1), 27-35. [doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00084-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00084-5)
  16. Li, Jianqing, Gao, Changsheng, Li, Chaoyong, Jing, Wuxing (2018). Survey on moving mass control technology. *Aerosp. Sci. Technol.*, 82-83, 594-606. [doi.org/10.1016/j.ast.09.033](https://doi.org/10.1016/j.ast.09.033)
  17. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Shchetinina, Yu. S. (2017). Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 56(2), 186-191. [doi.org/10.1134/S10642307020022](https://doi.org/10.1134/S10642307020022)
  18. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2018). Quasi-optimal braking of rotations of a body with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resisting medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 57(5), 689-694. [doi.org/10.1134/S1064230718050027](https://doi.org/10.1134/S1064230718050027)
  19. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostata with a moving mass in a resistive medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 58(5), 667-673. [doi.org/10.1134/S1064230719050022](https://doi.org/10.1134/S1064230719050022)
  20. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Sokolov, B. N. (1980). *Control of Oscillations*. Moscow: Nauka, 384. [in Russian].

**Лещенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
leshchenko\_d@ukr.net, ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Єршков Сергій Володимирович**

Державний астрономічний інститут ім. М. Д. Штернберга МДУ, к.ф.-м.н., ст. науковий співробітник  
Університетський проспект, 13, Москва, Росія 119992  
sergej-ershkov@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-6826-1691

**Палій Катерина Сергіївна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
ESChernyakova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5553-2405

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д. Квазіоптимальне гальмування в середовищі з опором обертань гіростата з рухомою масою, з'єднаною з тілом демпфером з квадратичним тертям / Д. Д. Лещенко, С. В. Єршков, К. С. Палій // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1.– С. 20-28.

*For references:*

Leshchenko, D., Ershkov, S., Paliy, E. (2020). Quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostata with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (1), 20-28

УДК 539.3

## ПРО ВПЛИВ СИЛ МАКСВЕЛЛА НА ДЕФОРМУВАННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Онопрієнко О. Д.<sup>1</sup>, Комаров О. В.<sup>2</sup>, Лобода В. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Дніпровський державний аграрно-економічний університет

<sup>2</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**Анотація:** Розглянуто тріщину, розташовану на межі поділу двох п'єзоелектричних напівнескінченних просторів. Вважається, що мають місце умови плоскої деформації, а на берегах тріщини враховується скінченна електрична проникність та напруження Максвелла, що виникають при переході заповнювача тріщини до п'єзоелектричних матеріалів верхнього та нижнього півпросторів. Рівномірне розподілене механічне навантаження та електричний потік прикладені на нескінченності. Припускаючи, що електричний потік рівномірно розподілений по області тріщини проблема зводиться до задачі Рімана-Гільберта, для якої знайдено точний аналітичний розв'язок. Це дозволило знайти у замкнутому вигляді всі необхідні електромеханічні характеристики на межі розділу та сформулювати рівняння для визначення електричного потоку. Аналітичне дослідження та рішення цього рівняння за формулою Кардано показують, що два його корені не узгоджуються з фізичним змістом. Наприклад, вони залишаються скінченними і відносно великими у випадку непроникної тріщини. Крім того, стрибок переміщення, який відповідає цим кореням, виявляється від'ємним. Тому легко вибрати фізично обґрунтований корінь вказаного рівняння. Аналіз рівняння підтверджує правильність припущення щодо рівномірного розподілу електричного потоку в області тріщини. Значення електричного потоку визначаються шляхом розв'язуванням отриманого кубічного рівняння. Після визначення електричного потоку, знаходяться коефіцієнти механічних напружень та електричного потоку, а також їх асимптотичні поля в околі вершини тріщини. Проаналізовано також випадок, який не враховує сили Максвелла в зоні тріщини. У цьому випадку знаходження електричного потоку зводиться до квадратного рівняння відносно цього параметра. Розглянуто окремий випадок тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі. Значення електричного потоку та параметри руйнування визначаються для цього випадку у простому вигляді. Проведено чисельний аналіз для тріщини між матеріалами PZT4 та PZT5 та для випадку тріщини в однорідному матеріалі. Електричний потік в області тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень та електричної індукції, відкриття тріщини та швидкість вивільнення енергії знайдені як функції від зовнішнього навантаження та електричної проникності середовища тріщини. Показано вплив Максвеллових сил на берегах тріщини на вказані параметри.

**Ключові слова:** п'єзоелектричний матеріал, міжфазна тріщина, сили Максвелла, скінченна електрична провідність.

## ON THE INFLUENCE OF MAXWELL FORCES ON THE DEFORMATION OF THE INTERFACE CRACK IN PIEZOELECTRIC BI-MATERIAL

O. Onopriienko<sup>1</sup>, O. Komarov<sup>2</sup>, V. Loboda<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dnipro State Agrarian And Economic University

<sup>2</sup>Oles Honchar Dnipro National University

**Abstract:** A crack located at the interface of two piezoelectric semi-infinite spaces is considered. Plane deformation conditions and the finite electric permeability of the crack are assumed. The



Maxwell stresses arising because of electric field transition from the crack filler to the piezoelectric materials of the upper and lower half-spaces are also taken into account on the crack faces. Evenly distributed mechanical load and electrical flow are applied at infinity. Assuming that the electric flux is evenly distributed over the crack region, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert problem, for which an exact analytical solution is found. This allowed us to find in a closed form all the necessary electromechanical characteristics at the interface and to form an equation to determine the electric flux. Analytical investigation and the solution of this equation according to Cardano's formula show that its two roots do not agree with the physical meaning. For example, they remain finite and relatively large in the case of an impermeable crack. In addition, the jump that corresponds to these roots is negative. Therefore, it is easy to choose a physically sound root of the specified equation. The analysis of the equation confirms the correctness of the assumption about the uniform distribution of electric flux in the crack region. The values of the electric flux are determined by solving the obtained cubic equation. After determining the electric flux, the coefficients of mechanical stress and electric flux, as well as their asymptotic fields around the crack tip are also found. A case that does not take into account Maxwell's stresses in the crack zone is also analyzed. In this case, finding the electric flux is reduced to a quadratic equation with respect to this parameter. A separate case of a crack in a homogeneous piezoelectric material is considered. For this case, the values of the electric flux and the fracture parameters are relatively simply determined. Numerical analysis was performed for the crack between PZT4 and PZT5 materials and also for the case of cracks in a homogeneous material. The electric flux in the crack region, the stress intensity and electrical induction factors, the crack opening and the energy release rate were found as functions of the external load and the electrical permeability of the crack medium. The influence of the Maxwell forces acting to the crack faces on the above mentioned parameters is shown.

**Keywords:** piezoelectric material, interface crack, Maxwell forces, finite electrical permeability.



## 1 ВСТУП

П'єзоелектрична кераміка є пріоритетним матеріалом для найрізноманітніших електронних та механічних пристроїв через її яскраво виражені п'єзоелектричні, діелектричні та піроелектричні властивості. Однак п'єзоелектрична кераміка є крихкою і схильною до розтріскування на всіх масштабах від електричних доменів до повних пристроїв. Різні дефекти, наприклад доменні стінки, межі зерна, тріщини та пори, домішки та включення, тощо, виникають у п'єзоелектричній кераміці. Такі дефекти викликають високі напруження та/або концентрацію електричного поля, які можуть приводити до виникнення та зростання тріщин, електричних пробоїв і, як наслідок, до руйнування електронних та механічних пристроїв. Ці обставини викликають великий інтерес до вивчення проблем механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів та підвищення надійності функціонування п'єзоелектричних елементів електронних виробів.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Переважає більшість попередніх досліджень ґрунтувалася на традиційному припущенні, що тріщина є або електроізолююваною, або електропроникною і поверхні тріщини є вільними від напружень. В роботах [1, 2] була запропонована модель, що дозволила врахувати скінченну електричну проникність середовища тріщини. Крім того, якщо сусідні середовища (наприклад, тріщина та її наповнювач) мають різні фізичні властивості, то електричні поля індукують сили на межах їх поділу. В електростатиці ці сили називаються кулонівськими силами [3], тоді як в рамках механіки суцільного середовища використовується термін «Максвеллові напруження» [4]. У випадку тріщин в однорідних п'єзоелектричних матеріалах, тріщини зі скінченною електричною проникністю досліджувались у роботах [5-9], напруження Максвелла враховувались в роботах [10-11]. Що ж стосується тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами, то скінченна електрична проникність враховувалась в роботах [12-13] в статичному випадку та в [14] для випадку рухомої тріщини.

В даній роботі проведено аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. Враховано як скінченну електричну проникність середовища тріщини, так і сили Максвелла, що викають між її берегами. Досліджено вплив цих сил на величину електричного потоку, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного зміщення біля вершин тріщини.

## 3 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Основні рівняння для п'єзоелектричного матеріалу у декартовій прямокутній системі координат  $(x_1, x_2, x_3)$  можуть бути записані у вигляді [1]

$$c_{ijrs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s \partial x_i} + e_{sji} \frac{\partial \phi}{\partial x_s \partial x_i} = 0, \quad (1a)$$

$$-\varepsilon_{ijrs} \frac{\partial \phi}{\partial x_s \partial x_i} + e_{irs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s \partial x_i} = 0, \quad (1b)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + e_{sji} \frac{\partial \phi}{\partial x_s}, \quad (2a)$$

$$D_i = -\varepsilon_{is} \frac{\partial \phi}{\partial x_s} + e_{irs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s}, \quad (26)$$

де  $u_k, \phi, \sigma_{ij}, D_i$  - пружні переміщення, електричний потенціал, напруження та електричні зміщення відповідно;  $c_{ijkl}, e_{ij}$  та  $\varepsilon_{ij}$  - пружні модулі, п'єзоелектричні та діелектричні константи, відповідно.

Згідно з [15] найбільш загальний дійсний розв'язок рівнянь (1), (2) можна записати у вигляді

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (3)$$

де  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$  - матриця, що складається з власних векторів  $\mathbf{a}_i$ , системи

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0, \quad (4)$$

а  $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T$  - довільна вектор - функція,  $z_i = x_1 + p_i x_3$ ,

( $i = 1, 2, 3, 4$ ). У наведених вище рівняннях, риска позначає комплексне спряження;

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, \phi]^T.$$

Введемо наступний вектор

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T \quad (5)$$

і за допомогою рівнянь (2), цей вектор можна представити у формі

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (6)$$

де матриця  $\mathbf{B}$   $4 \times 4$  може бути визначена як

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T + \mathbf{T}\mathbf{A} \text{diag}[p_1, p_2, p_3, p_4]$$

$$\text{та } \mathbf{f}'(z) = \left[ \frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^T.$$

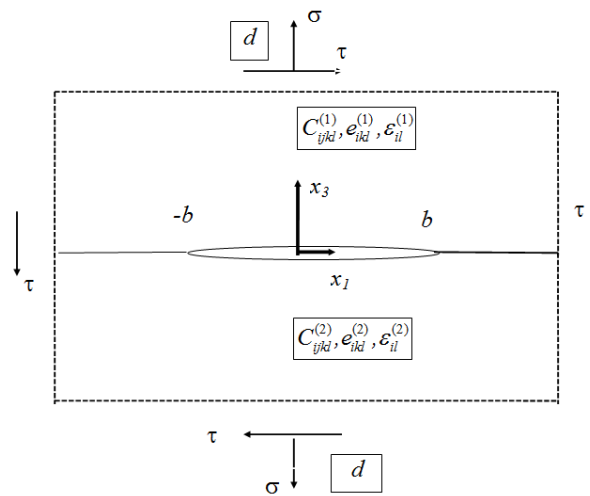
#### 4 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ВИВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

Розглядається тунельна міжфазна тріщина  $-b \leq x_1 \leq b, x_3 = 0$  (рис. 1) між двома напівскінченними керамічними просторами  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$ , обидва з яких поляризовані у напрямку  $x_3$ , ортогональному до берегів тріщини.

Матеріальні властивості верхнього та нижнього півпросторів визначаються матрицями  $c_{ijkl}^{(1)}, e_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$  (для  $x_3 > 0$ ) та  $c_{ijkl}^{(2)}, e_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$  (для  $x_3 < 0$ ). Навантаження, прикладене на нескінченності, задано наступним чином  $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma, \sigma_{13}^{(m)} = \tau, D_3^{(m)} = d$ , ( $m = 1$  для верхнього матеріалу, та  $m = 2$  для нижнього). Крім того, припускаємо ще дію нормальних напружень по напрямку  $x_1$  так, що це навантаження створює напруження та переміщення, які відповідають умовам неперервності на інтерфейсі. Оскільки навантаження не залежить від координати  $x_2$ , то може розглядатися плоска задача у площині  $(x_1, x_3)$ , як показано на рис. 1.

Нехтуючи зонами осциляції, які зазвичай невеликі, ми припускаємо, що тріщина повністю відкрита і до її берегів не прикладено механічного навантаження та

електричних зарядів. Більше того, ми припускаємо, що електричне поле всередині тріщини можна визначити як  $E_a = -(\varphi^+ - \varphi^-) / (u_3^+ - u_3^-)$ , де  $\varepsilon_a$  - електрична проникність середовища тріщини. Беручи до уваги, що  $D_3 = \varepsilon_a E_a$ , приходимо до наступної електричної умови



**Рис. 1.** Тунельна міжфазна тріщина  $-b \leq x_1 \leq b$ ,  $x_3 = 0$  між двома напівскінченними керамічними просторами

$$D_3 = -\varepsilon_a \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-}, \quad (7)$$

уздовж зони тріщини, яка була отримана раніше [2]. Це рівняння означає, що середовище тріщини можна розглядати як конденсатор з низькою ємністю [10]. Отже, згідно із Законом Кулона, електрична (Максвеллова) сила буде індукована з цієї ємності і її можна записати у формі [10, 11]

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \frac{1}{2} \varepsilon_a \left( \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \right)^2. \quad (8)$$

Умови на інтерфейсі можуть бути записані у наступній формі

$$\text{для } x_1 \notin (-b, b): [\mathbf{U}(x_1, 0)] = 0, [\mathbf{t}(x_1, 0)] = 0, \quad (9)$$

$$\text{для } x_1 \in (-b, b): \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = \frac{1}{2} \varepsilon_a \left( \frac{[\varphi(x_1, 0)]}{[u_3(x_1, 0)]} \right)^2, \quad (10)$$

$$[D_3(x_1, 0)] = 0, D_3[u_3(x_1, 0)] = -\varepsilon_a [\varphi(x_1, 0)],$$

де квадратні дужки означають стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс матеріалу,  $f^\pm(x_1) = f(x_1 \pm i \cdot 0)$ .

Згідно з рівняннями (3) та (6) розв'язок для кожної області може бути записаний наступним чином

$$\mathbf{U}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{t}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (12)$$

де  $j=1$  для  $x_3 > 0$  та  $j=2$  для  $x_3 < 0$ ; вектор-функції  $\mathbf{f}^{(1)}(z)$  та  $\mathbf{f}^{(2)}(z)$  аналітичні у верхній ( $x_3 > 0$ ) та нижній ( $x_3 < 0$ ) областях, відповідно.

Застосовуючи підхід, представлений у [15], приходимо до наступних виразів

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (13a)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (13b)$$

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{U}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{U}'^{(2)}(x_1, 0), \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{B}^{(1)}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{B}^{(2)})^{-1}, \quad \mathbf{W}^\pm(x_1) = \mathbf{W}(x_1 \pm i0), \quad (15)$$

де вектор-функція

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}^{(1)}(z) & \text{for } x_3 > 0 \\ -\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}^{(1)}(z) & \text{for } x_3 < 0, \end{cases} \quad (16)$$

є аналітичною у всій площині з розрізом уздовж області тріщини  $(-b, b)$ .

Для прийнятого виду поляризації матриця  $\mathbf{G}$  має наступну структуру

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & ig_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & ig_{33} & g_{34} \\ g_{41} & 0 & g_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}$  - дійсні,  $g_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$ ) - комплексні, та  $g_{ij} = -\bar{g}_{ij}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Аналіз матриці (17) показує, що у цьому випадку напружено-деформований стан може бути розділений на плоский та антиплоский стани. Оскільки антиплоска задача досить проста, ми приділяємо основну увагу до знаходження плоского напруженого стану. Останній характеризується переміщеннями  $u_1, u_3$  та електричним потенціалом  $\phi$ .

Використовуючи представлення (13) та враховуючи аналітичні перетворення, виконані в роботі [16], ми отримуємо вирази для напружень, електричного зміщення та похідних від механічних переміщень та стрибків електричного потенціалу на інтерфейсі у наступному вигляді

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4}D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

$$n_{j1}[u_1'(x_1, 0)] + i(n_{j3}[u_3'(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi'(x_1, 0)]) = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad j = 1, 3, 4, \quad (19)$$

де

$$F_j(z) = \sum_{k=1,3,4} Y_{jk} W_k(z) \quad (20)$$

- це аналітичні функції у всій площині з розрізом уздовж тріщини. Значення  $m_{j4}, m_{j1}, n_{j1}, n_{j4}$  - дійсні. Останнє твердження є справедливим за умови, що  $\gamma_j$  - дійсні, що має місце для великої кількості практично важливих біматеріальних комбінацій.  $\mathbf{Y}_j = [Y_{j1}, Y_{j3}, Y_{j4}] = \mathbf{S}_j \mathbf{G}$ , а  $\gamma_j$  та  $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j4}]^T$  є власними значеннями та власними векторами системи

$$(\gamma \mathbf{G}^T + \bar{\mathbf{G}}^T) \mathbf{S}^T = 0. \quad (21)$$

## 5 ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОТОКУ В ОБЛАСТІ ТРІЩИНИ

Ми припускаємо, що електричний потік є постійним уздовж області тріщини, тобто

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D \text{ для } x_1 \in (-b, b). \quad (22)$$

Це припущення буде обґрунтовано пізніше.

З (8) та виразу  $D_3 = \varepsilon_a E_a$  випливає що

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \frac{D^2}{2\varepsilon_a}. \quad (23)$$

Підставляючи рівняння (22), (23) у рівняння (18) та беручи до уваги умови на інтерфейсі (10), ми приходимо до наступної задачі Рімана [17]

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = \sigma_0 + m_{j4} D \quad (j = 1, 3, 4) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (24)$$

де  $\sigma_0 = D^2/2\varepsilon_a$ .

Для  $x_1 \notin (-b, b)$ , справедливе співвідношення  $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1)$ . Тому, для електромеханічних навантажень, заданих на нескінченності, може бути записана наступна умова з використанням формули (18)

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (25)$$

де

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{r_j}(\sigma + m_{j4}d), \quad \tilde{\tau}_j = \frac{-m_{j1}\tau}{r_j}, \quad r_j = (1 + \gamma_j) \quad (j = 1, 3, 4).$$

Аналогічно роботі [17] введемо нові функції

$$\Omega_j(z) = F_j(z) - \frac{\sigma_0 + m_{j4}D}{1 + \gamma_j}, \quad (26)$$

які мають ті ж властивості, що й  $F_j(z)$ . Рівняння (24), (25) приводиться до

$$\Omega_j^+(x_1) + \gamma_j \Omega_j^-(x_1) = 0 \quad (j = 1, 3, 4) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (27)$$

$$\Omega_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = T_j - iQ_j, \quad (28)$$

де

$$T_j = \frac{1}{r_j}[\sigma - \sigma_0 + m_{j4}(d - D)], \quad Q_j = \tilde{\tau}_j, \quad (j = 1, 3, 4).$$

Розв'язок задачі (27) та (28), згідно з [17], має наступний вигляд

$$\Omega_j(z) = X_j(z)(T_j - iQ_j)(z - 2 - ib\varepsilon_j), \quad (29)$$

де  $X_j(z) = (z + b)^{-1/2 + i\varepsilon_j} (z - b)^{-1/2 - i\varepsilon_j}$ ,  $\varepsilon_j = \ln \gamma_j / 2\pi$ .

З формул (31) та (34) витікає що

$$F_j(z) = X_j(z)(T_j - iQ_j)(z - 2ib\varepsilon_j) + \frac{\sigma_0 + m_{j4}D}{1 + \gamma_j}. \quad (30)$$

Згідно з рівнянням (27),  $\Omega_j^-(x_1) = -\Omega_j^+(x_1) / \gamma_j$  для  $x_1 \in (-b, b)$  і, таким чином, справедлива формула:



$$F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \Omega_j^+(x_1).$$

Отже, з рівнянь (19) та (30) отримуємо

$$\begin{aligned} n_{j1}[u'_1(x_1, 0)] + i\{n_{j3}[u'_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi'(x_1, 0)]\} = \\ = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (T_j - iQ_j)(x_1 + b)^{-1/2+i\epsilon_j} (x_1 - b)^{-1/2-i\epsilon_j} (x_1 - 2ib\epsilon_j). \end{aligned} \quad (31)$$

Інтегрування цього рівняння призводить до наступної формули для стрибків переміщення та електричного потенціалу

$$\begin{aligned} n_{j1}[u_1(x_1, 0)] + i\{n_{j3}[u_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi(x_1, 0)]\} = \\ = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (T_j - iQ_j) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b}\right)^{i\epsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} \text{ for } x_1 \in (-b, b). \end{aligned} \quad (32)$$

Слід зазначити, що для кераміки класу симетрії *bmm* з напрямком поляризації  $x_3$ , мають місце співвідношення  $n_{41} = 0$ ,  $\epsilon_4 = 0$ ,  $\gamma_4 = 1$  [16]. Враховуючи цей факт, з рівняння (32) для  $x_1 \in (-b, b)$ , ми отримуємо

$$\begin{aligned} n_{13}[u_3(x_1, 0)] + n_{14}[\phi(x_1, 0)] = \text{Im} \left\{ \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (T_1 - iQ_1) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b}\right)^{i\epsilon_1} \sqrt{x_1^2 - b^2} \right\}, \\ n_{43}[u_3(x_1, 0)] + n_{44}[\phi(x_1, 0)] = -2i(T_4 - iQ_4) \sqrt{x_1^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отримані рівняння (33) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $[u_3(x_1, 0)]$  та  $[\phi(x_1, 0)]$ . Вони приводять до розв'язку

$$\begin{aligned} [u_3(x_1, 0)] = \Delta^{-1} \{n_{44}H_1(x_1) - n_{14}H_2(x_1)\}, \\ [\phi(x_1, 0)] = \Delta^{-1} \{-n_{43}H_1(x_1) + n_{13}H_2(x_1)\}, \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$H_1(x_1) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (T_1 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha) \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad H_2(x_1) = 2T_4 \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad \alpha = \epsilon_1 \ln \left(\frac{b + x_1}{b - x_1}\right),$$

$$\Delta = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}.$$

Підставляючи вирази (34) до рівняння (7), ми отримуємо наступні співвідношення

$$D = \epsilon_a R(x_1) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (35)$$

де

$$R(x_1) = \frac{[\phi(x_1, 0)]}{[u_3(x_1, 0)]} = \frac{\gamma_0 T(x_1) n_{43} - 2T_4 n_{13}}{\gamma_0 T(x_1) n_{44} - 2T_4 n_{14}}, \quad T(x_1) = T_1 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha, \quad \gamma_0 = \gamma_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}. \quad (36)$$

Співвідношення (35) є кубічним рівнянням відносно  $D$  тому що  $T_1$  квадратична функція  $D$  і  $Q_1$  не залежить від  $D$ . Слід зазначити що  $\cos(\alpha)$  та  $\sin(\alpha)$  у рівняннях (35), (36) залежать від  $x_1$ , тобто у загальному випадку  $R(x_1)$  не є постійною величиною вздовж інтервалу  $(-1, 1)$ . Однак показано, що їх варіація в цьому інтервалі надзвичайно мала. Це означає, що електричний потік через область тріщини практично постійний, а

замість рівняння (35) для визначення електричного потоку  $D$  з достатньою точністю можна розглядати рівняння

$$D = \varepsilon_a \frac{\gamma_0 T_1 n_{43} - 2T_4 n_{13}}{\gamma_0 T_1 n_{44} - 2T_4 n_{14}}. \quad (37)$$

Це рівняння можна переформулювати як

$$\eta_0 D^3 + \eta_1 D^2 + \eta_2 D + \eta_3 = 0, \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2r_1 n_{14} - \gamma_0 r_4 n_{44}}{2\varepsilon_a}, \quad \eta_1 = s_0 + 2r_1 m_{44} n_{14} - \gamma_0 r_4 m_{14} n_{44}, \\ \eta_2 &= \gamma_0 r_4 (s_1 n_{44} + \varepsilon_a m_{14} n_{43}) - 2r_1 (s_4 n_{14} + \varepsilon_a m_{44} n_{13}), \quad \eta_3 = 2r_1 \varepsilon_a n_{13} s_4 - \gamma_0 r_4 \varepsilon_a n_{43} s_1, \\ s_0 &= 0,5(\gamma_0 r_4 n_{43} - 2r_1 n_{13}), \quad s_1 = \sigma + m_{14} d, \quad s_4 = \sigma + m_{44} d. \end{aligned}$$

Аналітичне дослідження та рішення рівняння (38) за формулою Кардано показують, що два корені цього рівняння не узгоджуються з фізичним змістом. Наприклад, вони залишаються скінченними і відносно великими для  $\varepsilon_a \rightarrow 0$ , тобто у випадку непроникної тріщини. Крім того, стрибок переміщення, який відповідає цим кореням, виявляється від'ємним. Тому легко вибрати фізично обґрунтований корінь (38). Цей корінь буде використаний у подальшому аналізі.

Варто зазначити, що припускаючи  $\sigma_0 = 0$  ми отримаємо так звані "точні" [11] електричні граничні умови, запропоновані в [10], для яких електричне навантаження на берегах тріщини не береться до уваги. Для цих умов замість рівняння (38) маємо квадратне рівняння для визначення електричного потоку  $D$ . Це рівняння може бути отримане з (38), припускаючи що  $\eta_0$  та  $s_0$  рівні нулю.

## 6 НАПРУЖЕННЯ, ЕЛЕКТРИЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЇХ КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ

Підставляючи (30) у рівняння (18) для  $j=1,4$  і беручи до уваги властивості матриці  $\mathbf{m}$ , ми приходимо до наступних рівнянь для напруження та електричного переміщення для  $x_1 > b$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = (1 + \gamma_1)(T_1 - iQ_1)(x_1 - 2ib\varepsilon_1)(x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_1} (x_1 - b)^{-1/2-i\varepsilon_1} + \sigma_0 + m_{14} D, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44} D_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{2T_4 x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0 + m_{44} D. \quad (40)$$

Співвідношення (39), (40) - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно напружень та електричних зміщень. Відділяючи дійсну та умовну частини у (39) і розв'язуючи отриману систему, знайдемо вирази для  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ ,  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$  та  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  для  $x_1 > b$ .

Далі, представимо коефіцієнти інтенсивності у точці  $b$  наступним чином

$$\begin{aligned} K_1 + m_{14} K_4 - im_{11} K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} (x_1 - b)^{i\varepsilon_1} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + \\ + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)], \end{aligned} \quad (41)$$



$$K_1 + m_{44}K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0)]. \quad (42)$$

Використовуючи (39), (40), ми отримуємо для  $x_1 \rightarrow b+0$

$$K_1 + m_{14}K_4 - im_{11}K_2 = \sqrt{\pi b}(1 - 2i\varepsilon_1)[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D) - im_{11}\tau]e^{i\psi}, \quad (43)$$

$$K_1 + m_{14}K_4 = \sqrt{\pi b}[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D)], \quad (44)$$

де  $\psi = \varepsilon \ln l$ , а  $l = 2b$  є довжиною тріщини. З формул (43), (44), можуть бути отримані аналітичні вирази для  $K_1$ ,  $K_2$  та  $K_4$ . Виділяючи дійсну та уявну частини в (43) та розв'язуючи отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо наступні вирази для коефіцієнтів інтенсивності  $K_1$ ,  $K_2$  та  $K_4$

$$K_1 = \sqrt{\pi b} \frac{m_{44}\Gamma_1 - m_{14}[\sigma - \sigma_0 + m_{44}(d - D)]}{m_{44} - m_{14}}, \quad K_2 = -\sqrt{\pi b} \frac{\Gamma_2}{m_{11}},$$

$$K_4 = \sqrt{\pi b} \frac{\sigma - \sigma_0 + m_{44}(d - D) - \Gamma_1}{m_{44} - m_{14}}, \quad (45)$$

де  $\Gamma_1 = \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \cos \psi$ ,  $\Gamma_2 = \omega_1 \sin \psi - \omega_2 \sin \psi$ ,  $\omega_1 = \sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D) - 2\varepsilon_1 m_{11} \tau$ ,

$\omega_2 = 2\varepsilon_1[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D)] + m_{11} \tau$ .

Розглянемо тепер деякі чисельні результати, отримані для міжфазної тріщини. Аналіз проводився для біматеріалу PZT4 / PZT5 під дією механічного навантаження  $\sigma = 10 \text{ MPa}$ ,  $\tau = 0$  та електричного переміщення  $d = 0,01 \text{ C/m}^2$  на нескінченності і  $a = 10 \text{ mm}$ . Значення електричного потоку  $D$ , коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_1$ ,  $K_2$  та електричний коефіцієнт інтенсивності  $K_4$  обчислені з урахуванням кулонівських сил, представлені в Таблиці 1 як функція електричної проникності середовища тріщини. Значення електричної проникності визначається за формулою  $\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$ , де  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$  - електрична проникність вакууму, а  $\varepsilon_r$  - відносна електрична проникність. Величина  $\varepsilon_r = 10^{-6}$  відповідає електрично непроникній тріщині,  $\varepsilon_r = 1$  - повітря,  $\varepsilon_r = 2,5$  - силікон,  $\varepsilon_r = 81$  - вода; та  $\varepsilon_r = 4000$  може розглядатися як значення, що відповідає електрично проникній тріщині.

**Таблиця 1.**

Зміна електричного потоку  $D \times 10^3$  ( $\text{C/m}^2$ ), силових та електричних коефіцієнтів інтенсивності в залежності від електричної проникності тріщини для біматеріалу PZT4/PZT5 під дією електромеханічного навантаження

$\varepsilon_r$	$D \times 10^3$ ( $\text{C/m}^2$ )	$K_1 \times 10^{-6}$ ( $\text{N/m}^{3/2}$ )	$K_2 \times 10^{-5}$ ( $\text{N/m}^{3/2}$ )	$K_4 \times 10^4$ ( $\text{C/m}^{3/2}$ )
$10^{-6}$	$1,23 \times 10^{-5}$	1,7701	1,5140	17,727
1	6,3653	1,3655	0,76297	6,4438
2,5	6,8543	1,5830	0,77846	5,5771
81	7,2312	1,7647	0,79454	4,9092
4000	7,2441	1,7711	0,79513	4,8863

Цікаво зазначити, що врахування кулонівських сил призводить до помітних змін результатів для всіх обчислених значень. Наприклад, коефіцієнт інтенсивності напруження  $K_1$  без врахування кулонівської сили не залежить від  $\varepsilon_a$  в той час як



врахування цієї сили призводить до відчутної залежності коефіцієнта інтенсивності напруження  $K_I$  від  $\varepsilon_a$  (див. Табл. 1)

## 7 ВИПАДОК ОДНОРІДНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо тепер окремо випадок однорідного п'єзоелектричного матеріалу. Розв'язок для цього випадку можна знайти за допомогою рівнянь (13а), (13б) та (18), (19) для однорідного матеріалу, але ми отримуємо це рішення як окремий випадок розв'язку, отриманого вище для неоднорідного п'єзоелектричного матеріалу. У цьому випадку  $\varepsilon_1 = 0, \gamma_1 = 1$ . Крім того, оскільки співвідношення  $\cos(\alpha) = 1, \sin(\alpha) = 0$  для  $x_1 \notin (-b, b)$  у цьому випадку точні, величина  $D$  згідно з рівняннями (35), (36) повністю постійна уздовж інтервалу  $(-b, b)$ . Це означає, що у цьому випадку рівняння (37), (38) теж будуть точними.

Для однорідного матеріалу формули (18) та (30) дають наступні вирази

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4} D_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = 2(T_j - iQ_j) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0 + m_{j4} D + \sigma_0 + m_{j4} D \text{ для } x_1 \notin (-b, b) \end{aligned} \quad (46)$$

Розглядаючи дійсну частину (46) для  $j=1$  та  $j=4$  і визначаючи  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$  та  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$  з отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (\sigma - \sigma_0) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0, \quad (47)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = (d - D) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + D \text{ для } x_1 \notin (-b, b). \quad (48)$$

Далі вводимо коефіцієнти інтенсивності напружень та електричних зміщень наступним класичним способом

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \quad (49)$$

$$K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} D_3^{(1)}(x_1, 0) \quad (50)$$

Формули (46), (47) та (48) дають наступні вирази для цих коефіцієнтів інтенсивності:

$$K_1 = \sqrt{\pi b} (\sigma - \sigma_0), \quad K_2 = \sqrt{\pi b} \tau, \quad K_4 = \sqrt{\pi b} (d - D). \quad (51)$$

Варто зазначити, що визначення (49), (50) та формули (51) впливають з визначень (41), (42) та формул (43), (44) та з урахуванням, що  $\varepsilon_1 = 0, \gamma_1 = 1$ .

З формул (47), (51) випливає, що ані напруження  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ , ані коефіцієнт інтенсивності  $K_1$  не залежать від електричного потоку  $d$ . Більш того, отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності формально збігаються з результатами статті [10].

Згідно з формулами (32) та (33) для однорідного матеріалу вирази для  $[u_1(x_1, 0)]$ ,  $[u_3(x_1, 0)]$  та  $[\varphi(x_1, 0)]$  мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} [u_1(x_1, 0)] &= -m_{11}n_{11}^{-1}\tau\sqrt{b^2 - x_1^2}, \\ [u_3(x_1, 0)] &= [H_{33}(\sigma - \sigma_0) + H_{34}(d - D)]\sqrt{b^2 - x_1^2}, \\ [\varphi(x_1, 0)] &= [H_{43}(\sigma - \sigma_0) + H_{44}(d - D)]\sqrt{b^2 - x_1^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

де  $H_{33} = \Delta^{-1}(n_{44} - n_{14})$ ,  $H_{34} = \Delta^{-1}(m_{14}n_{44} - m_{44}n_{14})$ ,  $H_{43} = \Delta^{-1}(n_{13} - n_{43})$ ,  
 $H_{44} = \Delta^{-1}(m_{44}n_{13} - m_{14}n_{43})$ .

Слід зазначити, що  $H_{ij}$  ( $i, j = 3, 4$ ) – компоненти матриці  $\mathbf{H}$ , введеної в [14]. Ця матриця пов'язана з матрицею  $\mathbf{G}$ , яка використовувалась у (13б) як  $i\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}$ .

Використовуючи формули (47), (48), напруження та електричне зміщення можуть бути асимптотично представленими для  $x_1 \rightarrow b+0$  у наступній формі

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= (\sigma - \sigma_0)\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}, \quad \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \tau\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}, \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) &= (d - D)\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Введемо також поняття швидкості вивільнення енергії, пов'язаної з точкою  $x_1 = b$ , згідно з [1]

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)[u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)[u_1(x_1 - \Delta l, 0)] + \\ &+ D_3^{(1)}(x_1, 0)[\phi(x_1 - \Delta l, 0)] \} dx_1. \end{aligned} \quad (54)$$

Підставляючи вирази (52), (53) у (54) і беручи до уваги, що  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$  не має особливості у точці  $x_1 \rightarrow b-0$ , приходимо до наступного виразу для швидкості вивільнення енергії

$$G = \frac{\pi b}{4} [H_{33}(\sigma - \sigma_0)^2 + (H_{34} + H_{43})(\sigma - \sigma_0)(d - D) + H_{44}(d - D)^2 - m_{11}n_{11}^{-1}\tau^2]. \quad (55)$$

## 8 ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ТРІЩИНИ У ОДНОРІДНОМУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ МАТЕРІАЛІ

Проведено чисельний аналіз для частково проникної тріщини в матеріалі PZT4 під дією електромеханічного навантаження. У таблиці 2 (перший стовпчик) представлені значення швидкості вивільнення енергії  $G$  для різних значень електричної проникності середовища тріщини. Механічне навантаження  $\sigma = 10 \text{ МПа}$  та електричне навантаження  $d = 0,01 \text{ С/м}^2$  прикладені на нескінченності. Сила Максвелла при цьому не враховувалась. З іншого боку, значення швидкості вивільнення енергії  $G$  були обчислені з урахуванням сили Максвелла для одного і того ж електромеханічного навантаження та електричної проникності середовища тріщини, які представлені в таблиці 2 (друга колонка). Для цієї таблиці при розрахунках була використана довжина тріщини  $a = 10 \text{ мм}$ . Нагадаємо, що аналогічно Таблиці 1 значення  $\varepsilon_r = 10^{-6}$  відповідають електрично непроникній тріщині,  $\varepsilon_r = 1$  - повітря,  $\varepsilon_r = 2,5$  - силікон,

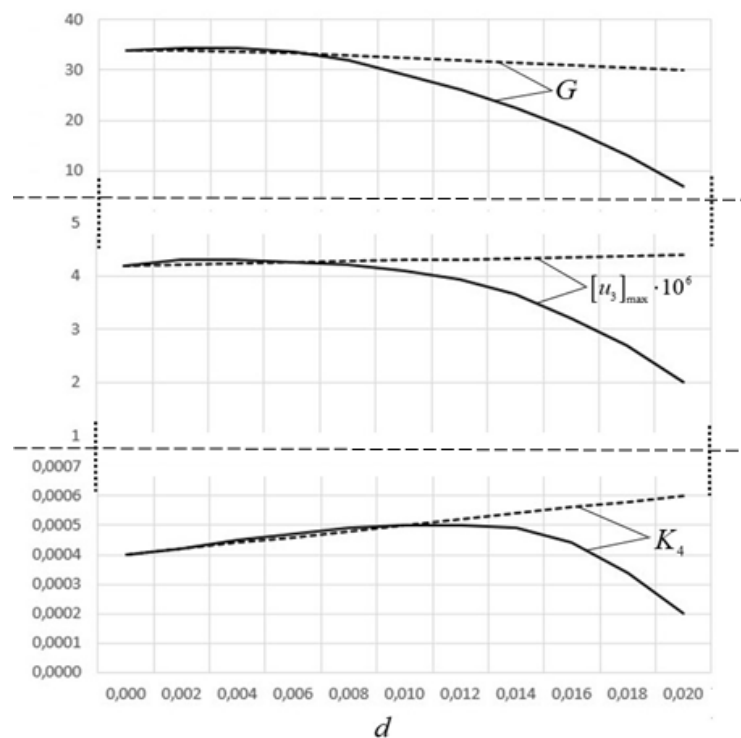
$\varepsilon_r = 81$  - вода, та  $\varepsilon_r = 4000$  можна вважати відповідаючим електрично проникній тріщині.

**Таблиця 2**

Зміна швидкості звільнення енергії в залежності від електричної проникності тріщини для п'єзоматеріалу PZT4 під дією електромеханічного навантаження.

$\varepsilon_r$	G (N/m)	G (N/m)
$10^{-6}$	-40,281	-40,281
1	31,046	17,709
2,5	35,289	27,937
81	36,291	36,011
4000	36,292	36,286

Варто зазначити, що урахування сили Максвелла призводить до суттєвих змін швидкості вивільнення енергії для  $\varepsilon_r = 1$ ,  $\varepsilon_r = 2,5$  і незначних змін для  $\varepsilon_r = 81$ , але для екстремальних значень електричної проникності (перший і останній рядки Таблиць) їх відмінності незначні.



**Рис. 2.** Коефіцієнт інтенсивності електричного зміщення  $K_4$ , максимальне розкриття тріщини  $[u_3(0,0)]$  та швидкість вивільнення енергії  $G$ , відповідно, як функція інтенсивності електричного потоку  $d$

На рисунку 2 представлені зміна коефіцієнта інтенсивності електричного зміщення  $K_4$  ( $Kл / м^{3/2}$ ), максимальне розкриття тріщини  $[u_3(0,0)]$  ( $м$ ) та швидкість вивільнення енергії  $G$  ( $Н/м$ ), відповідно, як функція інтенсивності електричного потоку  $d$  ( $Кл / м^2$ ). Припускається, що механічне навантаження дорівнює  $\sigma = 10MPa$ ,  $\tau = 0$ , а довжина тріщини вибирається рівною  $a = 10mm$ . Тріщина була заповнена силіконом, тобто

$\varepsilon_r = 2,5$ . Показані результати обчислень з урахуванням сили Максвелла (суцільні лінії) та без його врахування (пунктирні лінії).

Звідси випливає, що залежність коефіцієнта інтенсивності електричного зміщення та максимального розкриття тріщини від інтенсивності електричного потоку для  $\sigma_0 = 0$  майже лінійна. Використання енергетично узгоджених умов (урахування сили Максвелла  $\sigma_0$ ) приводить до видимої різниці у результатах для  $K_4$  та  $[u_3(0,0)]$  для  $d \geq 0,08 \text{ C/m}^2$  і ця різниця зростає зі зростанням  $d$ .

Залежність швидкості вивільнення енергії від  $d$  значно складніша, навіть для  $\sigma_0 = 0$ . В основному спостерігається, що  $G$  зменшується зі збільшенням інтенсивності електричного потоку  $d$ . Використання енергетично узгоджених граничних умов істотно зменшує швидкість вивільнення енергії  $G$  для великих значень електричного потоку  $d$ .

## 9 ВИСНОВКИ

Розглянуто плоску задачу для тріщини вздовж межі двох п'єзоелектричних напівнескінчених просторів. Вважається, що біматеріал піддається дії механічного навантаження та електричного потоку на нескінченності. Тріщина вважається механічно вільною і з електрично обмеженою проникністю. Крім того, враховується електрична взаємодія берегів тріщини, викликаних силами Максвелла в області тріщини.

Механічні переміщення та стрибки електричного потенціалу, а також напруження та електричні зміщення на межі розділу представляються через кусково голоморфну вектор-функцію. Припускається, що електричний потік є постійним по області. Тоді задача зводиться до задачі Рімана-Гільберта, яка має точний розв'язок. Всі електромеханічні характеристики на інтерфейсі представлені у замкнутому вигляді, а також виведені асимптотичні формули напружень та електричних зміщень в околі вершин тріщини.

Чисельні результати розраховуються для біматеріалу PZT4 / PZT5 і однорідного матеріалу PZT4 та представлені в Таблицях. Зокрема, показано, що електричний потік через зону тріщини та коефіцієнти інтенсивності залежать від електричної проникності середовища тріщини. На відміну від "точних" електричних граничних умов урахування сил Максвелла призводить до залежності коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_1$  від електричної проникності середовища тріщини.

Особлива увага приділяється окремому випадку однорідного п'єзоелектричного матеріалу. У цьому випадку електричний потік є постійним в області тріщини. Показано, що швидкість вивільнення енергії зменшується зі збільшенням електричного потоку для обох моделей тріщин. Максимальне розкриття тріщини збільшується зі збільшенням електричного потоку для електрично «точної» моделі тріщини. Для всіх розрахованих параметрів різниця в результатах, отриманих при використанні електрично «точних» та енергетично узгоджених моделей тріщин, незначна для малих значень електричного потоку. Однак ця різниця постійно зростає зі зростанням електричного навантаження.

## Література

1. Parton V. Z. Electromagnetoelasticity / V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev // Gordon and Breach Science Publishers. New York, 1988.
2. Hao T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // Eng. Fract. Mech, 1994, №47, p. 793–802.

3. Ricoeur A. Electrostatic traction at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions / A. Ricoeur, M. Kuna // *Mech. Research Communications*, 2009, №36, p. 330-335.
4. Zhang A. B. The influence of Maxwell stresses on the fracture mechanics of piezoelectric materials / A. B. Zhang, B. L. Wang // *Mech. Mater.*, 2014, №68, p. 64–69.
5. Gruebner O. Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium / O. Gruebner, M. Kamlah, D. Munz // *Eng. Fract. Mech.*, 2003, №70, p. 1399–1413.
6. Wang B. L. On the electric boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics / B. L. Wang, Y.-W. May // *Int. J. Engng Sci.*, 2003, №4, p. 633-652.
7. Wang B. L. Applicability of the crack faces electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials / B. L. Wang, Y.-W. May // *Int. J. Solids and Structures*. 2007, №44, p. 387–398.
8. Li W. On the crack face boundary conditions in electromechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates. / W. Li, R. M. McMeeking, C. M. Landis // *European J. of Mechanics A/Solids.*, 2008, №27, p. 285-301.
9. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding. / V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // *Int. J. Solids Struct.*, 2010, №47, 1795-1806.
10. Li Q. Why traction free? Piezoelectric crack and Coulombic traction / Q. Li, Y. H. Chen // *Archive of Applied Mechanics*, 2008, №78, 559-573.
11. Landis C. M. Electrically consistent boundary conditions for electromechanical fracture / C. M. Landis // *Int. J. Solids Structures*, 2004, №41, 6291-6315.
12. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // *Int. J. Solids and Structures*, 2006, №43, 1979-1990.
13. Li Q. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric piezoelectric biomaterials / Q. Li, Y. H. Chen // *ASME, J. Appl. Mech.*, 2008, №75, 011010-1-13.
14. Lapusta Y. Limited permeable crack moving along the interface of a piezoelectric bi-material / Y. Lapusta, A. Komarov, F. Labesse-Jied, R. Moutou Pitti, V. Loboda // *European J. Mechanics A/Solids.*, 2011, №30, p. 639-649.
15. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. // *J. Mech. Phys. Solids.*, 1992, №40, p. 739-765.
16. Herrmann K. P. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric biomaterial / Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. // *Int. J. Fracture.*, 2001, № 111, p. 203-227.
17. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity / Muskhelishvili N.I. // Noordhoff International Publishing, Leyden, 1963.

## References

1. Parton, V. Z. and Kudryavtsev, B. A. (1988). *Electromagnetoelasticity*. Gordon and Breach Science Publishers. New York.
2. Hao, T. H., Shen, Z. Y. (1994). A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Fract. Mech.* 47, 793–802.
3. Ricoeur, A., Kuna, M. (2009). Electrostatic traction at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions. *Mech. Research Communications*. 36, 330-335.
4. Zhang, A. B., Wang, B. L. (2014). The influence of Maxwell stresses on the fracture mechanics of piezoelectric materials. *Mech. Mater.* 68, 64–69.
5. Gruebner, O., Kamlah, M., Munz, D. (2003). Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium. *Eng. Fract. Mech.* 70, 1399–1413.
6. Wang, B. L., May, Y.-W. (2003). On the electric boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics. *Int. J. Engng Sci.* 4, 633-652.
7. Wang, B. L., May, Y.-W. (2007). Applicability of the crack faces electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials. *Int. J. Solids and Structures*. 44, 387–398.

8. Li, W., McMeeking, R. M., Landis, C. M. (2008). On the crack face boundary conditions in electromechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates. *European J. of Mechanics A/Solids*. 27, 285-301.
9. Loboda, V., Lapusta, Y., Sheveleva, A. (2010). Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding. *Int. J. Solids Struct.* 47, 1795-1806.
10. Li, Q., Chen, Y. H. (2008). Why traction free? Piezoelectric crack and Coulombic traction. *Archive of Applied Mechanics*. 78, 559-573.
11. Landis, C. M. (2004). Electrically consistent boundary conditions for electromechanical fracture, *Int. J. Solids Structures*. 41, 6291-6315.
12. Govorukha, V. B., Loboda, V. V., Kamlah, M. (2006). On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound. *Int. J. Solids and Structures*. 43, 1979-1990.
13. Li, Q., Chen, Y. H. (2008). Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric/piezoelectric bimaterials. *ASME, J. Appl. Mech.* 75, 011010-1-13.
14. Lapusta, Y., Komarov A., Labesse-Jied, F., Moutou Pitti, R., Loboda, V. (2011). Limited permeable crack moving along the interface of a piezoelectric bi-material. *European J. Mechanics A/Solids*. 30, 639-649.
15. Suo, Z., Kuo, C. M., Barnett, D. M., Willis, J. R. (1992). Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*. 40, 739-765.
16. Herrmann, K. P., Loboda, V. V., Govorukha, V. B. (2001). On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial. *Int. J. Fracture*. 111, 203-227.
17. Muskhelishvili, N. I. (1963). *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden.

**Онопрієнко Олег Дмитрович**

Дніпровський державний аграрно-економічний університет, асистент  
вул. Сергія Єфремова, 25, Дніпро, Україна, 49600  
onopriienko.oleg@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3127-4616

**Комаров Олександр Вікторович**

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, к.ф.-м.н., доцент  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050  
21\_21@ukr.net

ORCID: 0000-0002-8532-2820

**Лобода Володимир Васильович**

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050  
loboda@dnu.dp.ua

ORCID: 0000-0002-0432-629X

*Для посилань:*

Онопрієнко О. Д. Про вплив сил Максвелла на деформування міжфазної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі / О. Д. Онопрієнко, О. В. Комаров, В. В. Лобода // *Механіка та математичні методи*. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 29–44.

*For references:*

Onopriienko, O., Komarov, O., Loboda, V. (2020). On the influence of Maxwell forces on the deformation of the interface crack in piezoelectric bi-material. *Mechanics and mathematical methods*, 2 (1), 29–44.



УДК 514.765.1

## GEODESIC MAPPINGS OF SPACES WITH SPECIAL VECTOR FIELDS

V. Kiosak<sup>1</sup>, O. Lesechko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The paper investigates a special type of pseudo-Riemannian spaces – spaces that allow special vector fields. The specialization of vector fields is mainly reduced to the ability to determine the metric tensor by the combination of vectors or their derivatives.

With the development of the theory of relativity and the theory of Ricci flows, instead of the metric tensor, a linear combination of the metric tensor and the Ricci tensor began to be used.

In this work the vector fields are studied, the covariant derivative of which is proportional to the Ricci tensor.

One of the main methods of modeling physical and mechanical systems using pseudo-Riemannian spaces is modeling along mechanical trajectories. The mechanical trajectories are geodesic lines. Therefore, it is natural to have a scientific interest in non-trivial geodesic mappings.

Conformal mappings and some geometric properties of spaces that allow special vector fields were studied in the works of V. A. Kiosak and I. J. Hinterleitner. Geodesic mappings of such spaces have not been studied before.

The research is carried out using the linear form of the basic equations of the theory of geodesic mappings. The equations, conditions of their integration and their differential extensions are studied in the work.

As a result of the research, the system of basic equations is simplified and reduced to a known and previously studied type of the equations. The type of system, if it is necessary, coincides with the system for Einstein spaces, which allow non-trivial geodesic mappings. This opens wide opportunities for further research, but requires consideration of space specifics that allow special vector fields.

The developed methods can be used to study Ricci solitons and other issues related with Ricci streams. The very concept of Ricci flows allowed us to prove the well-known Poincare hypothesis. It is necessary to note that the integration conditions for the equations that characterize the vector fields, studied in this work, coincide with the equations given by Ricci solitons.

The research is carried out locally, in tensor form, without any restrictions as for the metric tensor and the signature of the studied spaces.

**Keywords:** pseudo-Riemannian spaces; special vector fields; geodesic mapping.

## ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ ВЕКТОРНИМИ ПОЛЯМИ

Кіосак В. А.<sup>1</sup>, Лесечко О. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** В роботі досліджується спеціальний тип псевдоріманових просторів – просторів, що допускають спеціальні векторні поля. Спеціалізація векторних полів, в основному, зводиться до можливості визначати метричний тензор через комбінацію векторів або їх похідних.

З розвитком теорії відносності та теорії потоків Річчі замість метричного тензора почали застосовувати лінійну комбінацію метричного тензора та тензора Річчі.

В представленому дослідженні вивчаються векторні поля, коваріантна похідна від яких, пропорційна тензору Річчі.

Одним із основних методів моделювання фізичних та механічних систем за допомогою псевдоріманових просторів є моделювання по траєкторіям руху. Траєкторіями руху є





геодезичні лінії. І тому, природним є науковий інтерес до нетривіальних геодезичних відображень.

Конформні відображення та деякі геометричні властивості просторів, що допускають спеціальні векторні поля, вивчались в роботах В. А. Кіосака та І. Й. Гінтерляйтнер. Геодезичні відображення таких просторів раніше не вивчались.

Дослідження ведуться за допомогою лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень. В роботі вивчаються самі рівняння, умови їх інтегрування та їх диференціальні подовження.

В результаті досліджень система основних рівнянь спрощена та зведена до відомого та раніше дослідженого виду рівнянь. Вид системи, за необхідністю, співпадає з системою для просторів Ейнштейна, що допускають нетривіальні геодезичні відображення. Це відкриває широкі можливості для подальших досліджень, але вимагає врахування специфіки просторів, що допускають спеціальні векторні поля.

Розроблені методи можуть бути застосовані для вивчення солітонів Річчі та інших питань, пов'язаних з потоками Річчі. Саме поняття потоків Річчі дозволило довести відому гіпотезу Пуанкаре. Зауважимо, що умови інтегрування для рівнянь, які характеризують векторні поля, що вивчаються в цій роботі, співпадають з рівняннями, якими задаються солітони Річчі.

Дослідження ведуться локально, в тензорній формі, без обмежень на знак метричного тензора та сигнатуру просторів, що вивчаються.

**Ключові слова:** псевдоріманові простори, спеціальні векторні поля, геодезичні відображення.

## 1 INTRODUCTION

Special vector fields in pseudo-Riemannian spaces  $V_n$  were studied by many authors. The research usually proceeded by imposing some limitations of differential type. For example, a vector field  $v^i$ , that complies with conditions:

$$v^i_{,j} = \alpha \delta_j^i + \beta_j v^i,$$

here  $\delta_j^i$  are Kronecker symbols, and comma, is a sign of covariant derivative with a respect to connectivity of  $V_n$ , is called a developable.

There are some special types of developable fields depending on the choice of  $\alpha$  and  $\beta_i$

1. Concircular vector field:  $\beta_i$  is a gradient,  $\alpha$  is some function.
2. Special concircular vector field:  $\beta_i = 0$ ,  $\alpha$  is some function.
3. Convergent vector field:  $\beta_i = 0$ ,  $\alpha = const$ .
4. Parallel vector field:  $\beta_i$  is some vector,  $\alpha = 0$ .
5. Absolute parallel vector field:  $\alpha = 0$ ,  $\beta_i = 0$ .

On the other hand vector field  $\Lambda_i$  –

$$\Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i} = 2R_{ij} + cg_{ij},$$

is a called a vector field that defines a Ricci soliton. Here  $R_{ij}$  is a Ricci tensor,  $g_{ij}$  is a metric tensor for  $V_n$ , and  $c$  is some constant.

When the vector  $\Lambda_i$  is gradient, then the soliton is called a gradient Ricci soliton. There are three types of solitons depending on a sign of the constant  $c$ : divergent, convergent and constant. Or in other words, covariant derivative of a vector field is a linear combination of internal objects of a given space. Taking into account algebraic restrictions, authors introduce  $\varphi(Ric)$  – vector fields, namely fields that satisfy the equations:

$$\varphi_{i,j} = sR_{ij}, \quad s_{,i} = 0. \tag{1}$$

It is clear that  $\varphi(Ric)$  – fields can belong to any of the above-mentioned types depending on the choice of  $R_{ij}$  and  $s$ . Some geometric properties of the described vector fields are studied in works [2, 3].

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

The beginnings of the mapping theory can be found in the work of ancient Greek mathematician Apollonius of Perga "Conics", where some inversion are studied in respect to circle, ellipse, parabola, hyperbola. Another important step towards modern theory of mappings is represented by the work of Lagrange on dynamic systems and their modelling.

The construction of classical theory of mappings started in the middle XIXth century in works of Italian geometer E. Beltrami, who treated mappings of surfaces on a plane, namely those mappings which transform a geodesic line into a straight line. The development of tensor analysis and its application to differential geometry resulted in basic fundamental results in works of T. Levi-Civita, H. Weyl, T. Thomas [8, 10, 11].

The theory of mappings attracted attention of many mathematicians and physicists which were interested in an application of these results in modelling of dynamic processes.

Furthermore, a motion of some types of mechanic systems, many processes in gravitational and electromagnetic fields, in solid matters follows trajectories that can be treated as geodesic lines of a space with affine connectivity or pseudo-Riemannian space. It is enabled by a regime when outer forces are absent or their motion is carried out along certain curves with a curvature vector coinciding with a vector of generalized outer forces.

The particular role among geometric objects is played by geodesic lines and their generalizations. This was a reason for a definition (since E. Beltrami's work) of geodesic mappings as mappings preserving geodesic lines. The famous Beltrami theorem, a cornerstone of modern theory of geodesic mappings was published in 1865. It states that geodesic mappings on flat spaces are permitted only by spaces of constant curvature. Over 120 years ago this result was generalized by A.V. Pogorelov. He treated pseudo-Riemannian spaces with minimal conditions on smoothness of metric.

An important contribution to the general patterns of modern theory of geodesic mappings was made by T. Levi-Civita, T. Thomas, H. Weyl, A. Z. Petrov, A. S. Solodovnikov, G. I. Kruchkovich, M. S. Siniukov [8, 9, 10, 11]. A detailed review can be found in the work of A. V. Aminova and in the chapter of M. S. Siniukov's monograph [1, 9].

### 3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The aim of the paper is a research on new characteristics of pseudo-Riemannian spaces that permit special vector fields and their mappings.

An object of the study is represented by special pseudo-Riemannian spaces, which contain vectors with covariant derivative which is proportional to Ricci tensor, as far as by their non-trivial geodesic mappings.

A subject of research is represented by differential equations, their integrability conditions and differential extensions, characterizing whether a given pseudo-Riemannian space permits a certain type of mapping. Systems of equations that determine the above-mentioned mappings are reduced to re-defined system of algebraic equations. By introduction of additional limitations we are able to solve some problems related to geometric properties of pseudo-Riemannian spaces that permit or do not permit geodesic mappings.

Methods of research are classic methods of Riemannian geometry. A research is conducted locally, in a class of sufficiently smooth functions with an application of tensor methods and without any limitations imposed on sign-definite state or signature of a metric.

### 4 BASIC RESULTS

Integrability conditions (1) can be written down as follows

$$\varphi_{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = s(R_{ij,k} - R_{ik,j}). \quad (2)$$

Taking into account properties of a Riemann tensor  $R_{ijk}^h$ , we obtain

$$\varphi_{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = sR_{ijk,\alpha}^{\alpha}. \quad (3)$$

Wrapping (3), we pass to the following expression

$$\varphi_{\alpha} R_k^{\alpha} = \frac{s}{2} R_{,k}, \quad (4)$$

here  $R$  is a scalar curvature.

A bijective correspondence between points of pseudo-Riemannian spaces  $R_{i..}^{\alpha\beta}$  with a metric tensor  $g_{ij}$  and  $\bar{V}_n$  with a metric tensor  $\bar{g}_{ij}$ , when every geodesic line of  $V_n$  finds a correspondence in a geodesic line of  $\bar{V}_n$  is called a geodesic mapping.

Geodesic mapping that differs from homothetic is called non-trivial.

An existence of non-trivial solutions for a linear form of basic equations of theory of geodesic mappings is a necessary and sufficient condition for an existence of non-trivial geodesic mappings.

A linear form of basic equations of theory of geodesic mappings takes a shape of the following [9, p.121]:

$$\alpha_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}; \tag{5}$$

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R_j^\alpha - a_{\alpha\beta} R_{ij}^{\alpha\beta}, \tag{6}$$

here  $\mu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$ ,  $R_j^i = R_{\alpha j} g^{\alpha i}$ ,  $R_{ij}^{h k} = R_{ij\alpha}^h g^{\alpha k}$ .

A linear form of basic equations of theory of geodesic mappings takes a shape of the following [9, p.123]

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_i^\alpha + a_{\alpha\beta} (2R_{i..}^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}_{,i}). \tag{7}$$

Solutions (5) and metric tensors  $V_n, \bar{V}_n$  are connected by an expression

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \tag{8}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \psi_{,\beta}, \tag{9}$$

where  $\bar{g}^{ij}$  are elements of an inverse matrix to  $\bar{g}_{ij}$ ;

$$\psi_{,i} = \frac{1}{2(n+1)} \partial_i \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right|.$$

Let us prove the following statement.

**Lemma 1.** When pseudo-Riemannian space  $V_n$  permits non-trivial geodesic mappings, then for a tensor  $a_{ij}$  and a vector  $\lambda_i$  the following conditions are true

$$\lambda_{i\alpha} a_j^\alpha - \lambda_{j\alpha} a_i^\alpha = 0, \tag{10}$$

here  $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$ .

**Proof.**

Integrability conditions for equations (5) can be written down as follows

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{kj} g_{il} - \lambda_{ki} g_{jl}. \tag{11}$$

Multiplying (11) by  $a_m^l$ , wrapping by index  $l$  and re-assigning  $m$ , we arrive at

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^\alpha a_l^\beta + a_{\alpha j} R_{ik\beta}^\alpha a_l^\beta = a_l^\alpha \lambda_{li} g_{jk} + a_l^\alpha \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{ki} a_{jl} - \lambda_{kj} a_{il}. \tag{12}$$

Symmetrizing by indices  $l$  and  $k$ , and taking into account the equation (11), canceling the terms we obtain

$$(a_i^\alpha \lambda_{\alpha k} - a_k^\alpha \lambda_{\alpha i}) g_{jl} + (a_i^\alpha \lambda_{\alpha l} - a_l^\alpha \lambda_{\alpha i}) g_{kj} + (a_j^\alpha \lambda_{\alpha k} - a_k^\alpha \lambda_{\alpha j}) g_{il} + (a_j^\alpha \lambda_{\alpha l} - a_l^\alpha \lambda_{\alpha j}) g_{ik} = 0. \tag{13}$$

Wrapping by indices  $j$  and  $l$ , we can see that equations (10) are true.



Thus, the lemma is proved.

**Theorem 1.** When pseudo-Riemannian space  $V_n$ , permitting  $\varphi(Ric)$  vector fields, permits non-trivial geodesic mappings, then vectors  $\varphi_i$  and  $\lambda_i$  are colinear, or in other words

$$\varphi_i = \rho \lambda_i, \tag{14}$$

here  $\rho$  some invariant.

**Proof.**

Taking a covariant derivative of the latter and paying due attention to (5), we arrive at

$$\begin{aligned} & \lambda_\alpha R_{jkl}^\alpha g_{im} + \lambda_i R_{mjkl} + \lambda_\alpha R_{ikl}^\alpha g_{jm} + \lambda_j R_{mikl} + a_{\alpha i} R_{jkl,m}^\alpha + a_{\alpha j} R_{ikl,m}^\alpha = \\ & = \lambda_{li,m} g_{jk} + \lambda_{lj,m} g_{ik} - \lambda_{ki,m} g_{jl} - \lambda_{kj,m} g_{il}. \end{aligned} \tag{15}$$

Wrapping the latter by  $l$  and  $m$ , we obtain

$$\lambda_\alpha R_{jki}^\alpha + \lambda_\alpha R_{ikj} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ik} + a_i^\alpha R_{kja,\beta}^\beta + a_j^\alpha R_{kia,\beta}^\beta = \lambda_{\alpha i}^\alpha g_{jk} + \lambda_{\alpha j}^\alpha g_{ik} - \lambda_{ki,j} - \lambda_{kj,i}. \tag{16}$$

Multiplying (11) by  $\varphi^l$  and wrapping by  $l$ , we pass to the expression:

$$a_{\alpha i} R_{jk\beta}^\alpha \varphi^\beta + a_{\alpha j} R_{ik\beta}^\alpha \varphi^\beta = \varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk} + \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik} - \lambda_{kj} g_{il} - \lambda_{kj} \varphi_i - \lambda_{ki} \varphi_j. \tag{17}$$

As far as (3) is true we can transform the above-formulated equations into a shape

$$\begin{aligned} & s(\lambda_\alpha R_{jki}^\alpha + \lambda_\alpha R_{ikj} + \lambda_i R_{jk} + \lambda_j R_{ik} - \lambda_{\alpha i}^\alpha g_{jk} - \lambda_{\alpha j}^\alpha g_{ik} + \lambda_{ki,j} + \lambda_{kj,i}) = \\ & = \lambda_{kj} \varphi_i + \lambda_{ki} \varphi_j - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk} - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik}. \end{aligned} \tag{18}$$

Alternating by indices  $k, j$  and taking into account properties of a Riemann tensor, we can write down the following

$$s(4\lambda_\alpha R_{ikj}^\alpha + \lambda_j R_{ik} - \lambda_k R_{ij} - \lambda_{\alpha j}^\alpha g_{ik} + \lambda_{\alpha k}^\alpha g_{ij}) = \varphi_j \lambda_{ki} - \varphi_k \lambda_{ij} - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik} + \varphi^\alpha \lambda_{\alpha k} g_{ij}. \tag{19}$$

Then, multiplying by  $\lambda^i$  and wrapping by  $i$ , the latter equations will be transformed into

$$s(\lambda_j \lambda_\alpha R_k^\alpha - \lambda_k \lambda_\alpha R_j^\alpha - \lambda_{\alpha j}^\alpha \lambda_k + \lambda_{\alpha k}^\alpha \lambda_j) = \varphi_j \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha - \varphi_k \lambda_\alpha \lambda_j^\alpha - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} \lambda_k + \varphi^\alpha \lambda_{\alpha k} \lambda_j. \tag{20}$$

After certain transformations we obtain

$$\lambda_j (s\lambda_\alpha R_k^\alpha + s\lambda_{\alpha k}^\alpha - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha k}) - \lambda_k (s\lambda_\alpha R_j^\alpha + s\lambda_{\alpha j}^\alpha - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j}) = \varphi_j \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha - \varphi_k \lambda_\alpha \lambda_j^\alpha. \tag{21}$$

Let us multiply the latter by  $\xi^j$  and group it, then the following expression appears

$$s\lambda_\alpha R_k^\alpha + s\lambda_{\alpha k}^\alpha - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha k} = {}^1 c \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha + {}^2 c \varphi_k + {}^3 c \lambda_k, \tag{22}$$

where  $\lambda_\alpha \xi^\alpha = 1$ ;  $\varphi_\alpha \xi^\alpha \stackrel{def}{=} {}^1 c$ ;  $\lambda_\alpha \lambda_\beta^\alpha \xi^\beta \stackrel{def}{=} -{}^2 c$ ;  $(s\lambda_\alpha R_\beta^\alpha + s\lambda_{\alpha\beta}^\alpha - \varphi^\alpha \lambda_{\alpha\beta}) \xi^\alpha \stackrel{def}{=} {}^3 c$ .

The equation (21) can be changed by substitution of (22) into a form

$${}^1 c \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha - {}^1 c \lambda_k \lambda_\alpha \lambda_j^\alpha + {}^2 c \lambda_j \varphi_k - {}^2 c \lambda_k \varphi_j = \varphi_j \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha - \varphi_k \lambda_\alpha \lambda_j^\alpha. \tag{23}$$

Grouping the latter

$$\varphi_j (\lambda_\alpha \lambda_k^\alpha + {}^2 c \lambda_k) - \varphi_k (\lambda_\alpha \lambda_j^\alpha + {}^2 c \lambda_j) = {}^1 c \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha - {}^1 c \lambda_k \lambda_\alpha \lambda_j^\alpha. \tag{24}$$

When wrapped with a vector that corresponds to  $\varphi_\alpha \eta^\alpha = 1$ , and  ${}^1 c \lambda_\alpha \eta^\alpha \neq 1$ , it takes a shape

$$\lambda_\alpha \lambda_k^\alpha + {}^2 c \lambda_k = \tau \lambda_\alpha \lambda_k^\alpha + \tau \lambda_k + \tau \varphi_k, \quad (25)$$

where  ${}^1 c \lambda_\alpha \eta^\alpha = \tau$ ;  $-{}^1 c \lambda_\alpha \lambda_\beta^\alpha \eta^\beta = \tau$ ;  $(\lambda_\alpha \lambda_\beta^\alpha + {}^2 c \lambda_\beta) \eta^\beta = \tau$ .

Substituting (25) in (24), we arrive at

$$\varphi_i \lambda_j - \varphi_j \lambda_i = 0 \quad (26)$$

or otherwise  $\varphi_i = \rho \lambda_i$ , here  $\rho = \left( {}^1 c \right)^{-1}$ .

Theorem 1 is proved.

**Lemma 2.** In case of non-trivial geodesic mapping of pseudo- Riemannian spaces that permit  $\varphi(Ric)$  -fields, vector  $\lambda_i$  is an eigenvector of tensor  $a_{ij}$ , namely

$$\lambda^\alpha a_{\alpha i} = u \lambda_i, \quad (27)$$

here  $u$  is some invariant.

**Proof.**

Let us take a covariant derivative of (14)

$$\varphi_{i,j} = \rho_j \lambda_i + \rho \lambda_{i,j}. \quad (28)$$

Symmetrizing the latter, we see that

$$\rho_i = \rho \lambda_i \quad (29)$$

and then (27) takes a shape of

$$\varphi_{i,j} = \rho \lambda_i \lambda_j + \rho \lambda_{i,j}. \quad (30)$$

It is known that tensor  $a_{ij}$  and a Ricci tensor are limited by a condition

$$a_{\alpha i} R_j^\alpha - a_{\alpha j} R_i^\alpha = 0. \quad (31)$$

Taking into account the definition of  $\varphi(Ric)$ -fields, we can formulate the following expression

$$a_i^\alpha \varphi_{\alpha,j} - a_j^\alpha \varphi_{\alpha,i} = 0. \quad (32)$$

Substituting (30), and applying Lemma 1, we obtain

$$\lambda_i a_j^\alpha \lambda_\alpha - \lambda_j a_i^\alpha \lambda_\alpha = 0. \quad (33)$$

Multiplying by  $\xi^i$ , we can see that formula (27) is true, while  $u = \lambda_\alpha a_\beta^\alpha \xi^\beta$ .

The lemma is proved.

Equation (19) can be re-written as follows due to (14) and (30)

$$4s \lambda_\alpha R_{ik}^\alpha = (s \lambda_{\alpha j}^\alpha - \rho \lambda^\alpha \lambda_{\alpha j}) g_{ik} - (s \lambda_{\alpha k}^\alpha - \rho \lambda^\alpha \lambda_{\alpha k}) g_{ij}. \quad (34)$$

The latter equation can be wrapped by  $i, k$



$$s\lambda_{\alpha j}^{\alpha} - \rho\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha j} = \frac{4s}{n-1}\lambda_{\alpha}R_j^{\alpha}. \quad (35)$$

Let us substitute the latter expression into (34)

$$\lambda_{\alpha}W_{ijk}^{\alpha} = 0. \quad (36)$$

Here Weyl tensor implies

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1}(\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}). \quad (37)$$

On the other hand, taking into account (14), the equation (17) can be written down as follows:

$$a_{\alpha i}R_{jk\beta}^{\alpha}\lambda^{\beta} + a_{\alpha j}R_{ik\beta}^{\alpha}\lambda^{\beta} = \lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha i}g_{jk} + \lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha j}g_{ik} - \lambda_{kj}g_{il} - \lambda_{kj}\lambda_i - \lambda_{ki}\lambda_j. \quad (38)$$

Applying (38) and (34), we arrive at

$$a_{\alpha i}v^{\alpha}g_{jk} - v_j a_{ik} + a_{\alpha j}v^{\alpha}g_{ik} - v_i a_{jk} = \lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha i}g_{jk} + \lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha j}g_{ik} - \lambda_{kj}\lambda_i - \lambda_{ki}\lambda_j. \quad (39)$$

The above equation can be wrapped by  $j, k$

$$(a_{\alpha i}v^{\alpha} - \lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha i})n = av_i - \mu\lambda_i, \quad (40)$$

where

$$v_i = \frac{1}{4s}(s\lambda_{\alpha i}^{\alpha} - \rho\lambda^{\alpha}\lambda_{\alpha i}); \quad a = a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad \mu = \lambda_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{n}(av_i - \mu\lambda_i)g_{jk} + \frac{1}{n}(av_j - \mu\lambda_j)g_{ik} - v_i a_{jk} - v_j a_{ik} + \lambda_i\lambda_{kj} - \lambda_{ki}\lambda_j = 0. \quad (41)$$

Then, let us alternate it by indices  $j, k$

$$\frac{1}{n}(av_j - \mu\lambda_j)g_{ik} + \frac{1}{n}(av_k - \mu\lambda_k)g_{ij} - v_j a_{ik} - v_k a_{ij} + \lambda_{ki}\lambda_j - \lambda_{ji}\lambda_k = 0. \quad (42)$$

In the latter equation, let us re-assign indices  $i$  and  $k$  and the obtained expression can be added to (41). After these transformations we obtain

$$\frac{1}{n}(av_j - \mu\lambda_j)g_{ik} - v_j a_{ik} + \lambda_j\lambda_{ki} = 0. \quad (43)$$

Let us wrapp (43) with  $\xi^j$ , then we get

$$\lambda_{i,j} = Ag_{ij} + Ba_{ij}, \quad (44)$$

here

$$B = \frac{1}{n}v_{\alpha}\xi^{\alpha}; \quad A = \frac{1}{n}(\mu\lambda_{\alpha} - av_{\alpha})\xi^{\alpha}.$$

It is clear that

$$A = \frac{1}{n}(\mu - aB). \quad (45)$$

Thus, the following is true

**Theorem 2.** When a pseudo-Riemannian space that permits  $\varphi(Ric)$ -fields, permits non-trivial geodesic mappings too, the a system of equations (5), (44) has a solution with a necessity.



## 5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

Thus, we obtained an equation (44) that characterizes pseudo-Riemannian spaces permitting non-trivial geodesic mappings and permitting  $\varphi(Ric)$ -fields. These spaces are well-known in the theory of geodesic mappings and were studied earlier in relation to the studies on geodesic mappings of Einstein spaces. However, a direct transfer of the obtained results is hampered by peculiarities of Einstein spaces and requires an additional research.

## 6 CONCLUSIONS

The paper simplified a linear form of basic equations of theory of geodesic mappings for pseudo-Riemannian spaces that permit  $\varphi(Ric)$ -vector fields.

The obtained results are applicable to study on conformal mappings of Einstein spaces both locally and globally [5, 6] as well as to a study on quasi-Einstein spaces [4, 7].

Profound correspondences exist between theory of geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces and theory of holomorphic projective mappings of Kahlerian spaces. Important perspectives are opened by application of methods of topology.

An actual problem is constituted by construction of examples and classification of the above-mentioned spaces.

## References

1. Aminova, V. (1993). Pseudo-Riemannian manifolds with common geodesies. Russian Math. Surveys, 48(2), 105–160.
2. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2009).  $\varphi(Ric)$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces. Proceedings of American Institute of Physics, 1191, 98-103; [doi.org/10.1063/1.3275604](https://doi.org/10.1063/1.3275604).
3. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2008).  $\varphi(Ric)$ -Vector Fields in Riemannian Spaces. Archivum Mathematicum, 44(3), 385–390.
4. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018, Proceedings, Bratislava, 563–569.
5. Kiosak, V. A., Matveev, V. S. (2009). Complete Einstein metrics are geodesically rigid. Comm. Math. Phys., 289(1), 383–400.
6. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78, 1–11.
7. Kiosak, V. A., Matveev, V. S., Mikes, J., Shandra, I. G. (2010). On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics. Mathematical Notes, 87(4), 586–587.
8. Levi-Civita, T. (1896). Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. Ann. Mat. Milano, Ser. 2., 24, 255-300.
9. Sinyukov, N. S. (1979). Geodesic mappings of Riemannian spaces. M.: Nauka, 255. (in Russian).
10. Thomas, T. Y. (1925). On projective and equiprojective geometries of paths. PWC. Nat. Acad. Sci. USA, 11, 198-203.
11. Weyl, H. (1921). Zur Innitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auassung. Gottinger Nachtr, 99-112.

## Література

1. Aminova V. Pseudo-Riemannian manifolds with common geodesies / V. Aminova // Russian Math. Surveys. – 1993. – 48(2). – P. 105–160.
2. Hinterleitner I.  $\varphi(Ric)$  -Vector Fields on Conformally Flat Spaces / I. Hinterleitner, V. Kiosak // Proceedings of American Institute of Physics. – 2009. – 1191. – P. 98-103; [doi.org/10.1063/1.3275604](https://doi.org/10.1063/1.3275604).
3. Hinterleitner I.  $\varphi(Ric)$  -Vector Fields in Riemannian Spaces / I. Hinterleitner, V. A. Kiosak // Archivum Mathematicum. – 2008. – 44(3). – P. 85–390.

4. Kiosak V. Mappings of Spaces with Affine Connection / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko // 17th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2018. – Proceedings, Bratislava. – 2018. – P. 563–569.
5. Kiosak V. A. Complete Einstein metrics are geodesically rigid / V. A. Kiosak, V. S. Matveev // Comm. Math. Phys. – 2009. – 289(1). – P. 383–400.
6. Kiosak V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor / V. Kiosak, V. Matveev // Journal of Geometry and Physics. – 2014. – 78. – P. 1–11.
7. Kiosak V. A. On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics / V. A. Kiosak, V. S. Matveev, J. Mikes, I. G. Shandra // Mathematical Notes. – 2010. – 87(4). – P. 586–587.
8. Levi-Civita T. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche / T. Levi-Civita // Ann. Mat. Milano, Ser. 2. – 1896. – 24. – P. 255-300.
9. Синюков Н. С. Геодезические отображения Римановых пространств / Н. С. Синюков // – М.: Наука, 1979. – 255с.
10. Thomas T. Y. On projective and equiprojective geometries of paths / T. Y. Thomas // PWC. Nat. Acad. Sci. USA. – 1925. – 11. – P. 198-203.
11. Weyl H. Zur Innitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auassung / H. Weyl // Gottinger Nachtr. – 1921. – P. 99-112.

**Kiosak Volodymyr**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
kiosakv@ukr.net,  
ORCID: 0000-0002-7433-6709

**Lesechko Oleksandr**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., associate professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
a.lesechko@ukr.net,  
ORCID:0000-0002-2352-6174

*For references:*

Kiosak, V., Lesechko, O. (2020). Geodesic mapping of spaces with special vector fields, Mechanics and Mathematical Methods, 2 (1). 45-54.

*Для посилань:*

Кіосак В. А. Геодезичні відображення просторів зі спеціальними векторними полями / В. А. Кіосак, О. В. Лесечко // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 45-54.

УДК 620.193.4:624.012.45

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ КОЛИВАНЬ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ КОЛОНИ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ І ПЛАСТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БЕТОНУ

Фомін В. М.<sup>1</sup>, Фоміна І. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** В останні десятиріччя при проектуванні конструкцій став проводитися прямий динамічний розрахунок на сейсмічні впливи. Подібний розрахунок просторових каркасних залізобетонних конструкцій з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів є складним завданням. Для цих цілей розроблені програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій, засновані на методі скінчених елементів. При урахуванні нелінійних і пластичних властивостей матеріалів порядок системи розв'язувальних рівнянь методу скінчених елементів для складних споруд дуже високий. При цьому необхідно зробити розбиття балок і колон, що утворюють конструкцію, на велику кількість скінчених елементів, так як деформаційні властивості бетону різні в стислій і розтягнутої зонах, а також в зонах навантаження і розвантаження. У цій статті пропонується метод дослідження нелінійних коливань залізобетонної колони змінного перерізу, заснований на методі граничних елементів, який приводить до значно меншого об'єму обчислювальної роботи, а, отже, до більш простому аналізу результатів. Сегмент колони змінного перерізу в межах одного поверху представляє собою стержень постійного прямокутного перетину з постійним армуванням. Маса перекриттів будівлі представлена у вигляді системи матеріальних точок, розташованих на колоні. Передбачається, що дослідження коливань буде вестися покроковим методом. На кожному кроці проводиться визначення коефіцієнтів впливу. Вони істотно залежать від напружено-деформованого стану кожного зі стержнів колони на початку кроку. Для визначення коефіцієнтів впливу на підставі методу граничних елементів проводиться побудова фундаментальних розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь просторового вигину залізобетонного стержню відносно приростів прогинів стержню з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. Далі за допомогою системи основних рівнянь динаміки для зазначених матеріальних точок визначаються прирости реакцій колони по відношенню до цих точок. Потім визначаються прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень їх прискорень, швидкостей і переміщень.

**Ключові слова:** нелінійні і пластичні властивості бетону; метод граничних елементів; покроковий метод; динаміка каркасних будівель; імпульсний вплив.

## APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN INVESTIGATION OF VIBRATIONS OF A REINFORCED CONCRETE COLUMN OF VARIABLE CROSS-SECTION TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEAR AND PLASTIC PROPERTIES OF CONCRETE

V. Fomin<sup>1</sup>, I. Fomina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture



**Abstract:** Last decades, a direct dynamic analysis of seismic effects began to be applied at design of structures. Such a design of spatial frame reinforced concrete structures, taking into account the nonlinear work and plastic properties of materials, is a difficult task. For these purposes, software systems for nonlinear dynamic structural analysis based on the finite element method have been developed. When taking into account the nonlinear and plastic properties of materials, the order of resolving equation systems of the finite element method for complex structures is very high. In this case, it is necessary to divide the beams and columns forming the structure into a large number of finite elements, since the deformation properties of concrete are different in the compressed and stretched zones, as well as in the loading and unloading zones. This article proposes a method for studying the nonlinear vibrations of a reinforced concrete column of variable cross-section, based on the boundary element method, which leads to a significantly smaller amount of computational work, and, therefore, to a simpler analysis of the results. The segment column of variable cross-section within one floor is a rod of constant rectangular cross section with constant reinforcement. The mass of ceilings of the building is presented in the form of a system of material points located on the column. It is assumed that the study of vibrations will be carried out by step-by-step method. At each step, the determination of the coefficients of influence is carried out. They significantly depend on the stress-strain state of each of the column rods at the beginning of the step. To determine the influence coefficients on the basis of the boundary element method, the fundamental solutions of the Cauchy problem are constructed for the system of differential equations of the reinforced concrete rod spatial bending relative to the increments of the rod deflections taking into account the physical and geometric nonlinearities and plasticity of concrete. Then, using the system of basic equations of dynamics for the mentioned above material points, the increments of the column reactions with respect to these points are determined. Then, the increments of accelerations, velocities and displacements of material points are determined. The step ends with the calculation of new values of their accelerations, velocities and displacements.

**Keywords:** nonlinear and plastic properties of concrete; boundary element method; step by step method; dynamics of frame buildings; impulse effect.

## 1 ВСТУП

Розвиток динамічних методів розрахунку споруд пов'язаний з урахуванням геометричної нелінійності конструкцій, фізичної нелінійності та пластичності матеріалів. При цьому використовується скінченно-елементна модель будівлі. Проте такий розрахунок є досить складним завданням. Для залізобетонних конструкцій це пов'язано з тим, що при обчисленні методом скінченних елементів необхідно враховувати напружено-деформований стан в точках будівлі, розподіл стиснутих і розтягнутих зон, зон навантаження і розвантаження, що приводить до розв'язання системи гігантських розмірів і великих обчислювальних і часових витрат.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В останні десятиліття при проектуванні конструкцій став поводитися прямий динамічний розрахунок на сейсмічні впливи [1-4]. Як вже помічалось вище подібний розрахунок просторових каркасних залізобетонних конструкцій з урахуванням нелінійної роботи і пластичних властивостей матеріалів є досить складним завданням. Для цих цілей розроблені програмні комплекси з нелінійного динамічного розрахунку конструкцій, засновані на методі скінченних елементів [5-8]. При цьому доводиться проводити розбиття конструкції на велику кількість скінченних елементів, щоб врахувати різні деформаційні властивості бетону в зонах розтягування і стиснення, навантаження і розвантаження. У зв'язку з цим виникає необхідність у використанні альтернативних методів [9-12]. До них відноситься і метод граничних елементів [13-14], для застосування якого необхідна наявність диференціовальних рівнянь згину і методика побудови матриці фундаментальних рішень задачі Коші для цих рівнянь і матриці-стовпці приватних рішень, що залежать від заданого навантаження.

## 3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕНЬ

Метою роботи є побудова методу, що дозволяє провести дослідження коливань колони змінного перерізу (рис. 1,  $n$  - кількість поверхів), що моделює висотну будівлю, з використанням методу граничних елементів. Сегмент колони змінного перерізу в межах одного поверху представляє собою стержень постійного прямокутного перетину з постійним армуванням (номера стержнів проставлені в кільцях).

## 4 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети застосовано покроковий метод дослідження, теорію диференціальних рівнянь, теорію матриць, метод граничних елементів.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Маса перекриттів будівлі представлена у вигляді системи матеріальних точок  $m_k$  (зосереджених мас,  $k = 1, 2, \dots, n$ ), розташованих на колоні. Передбачається, що дослідження коливань буде вестися покроковим методом, при якому на кожному кроці система сил, прикладених до мас, отримує приріст  $\Delta P_i^{(k)}$  ( $k$  - номер поверху,  $i$  - номер осі  $x_i^{(k)}$ , якої паралельна сила,  $i = 2, 3$ ; сила  $P_1^{(k)}$  - вага матеріальної точки, в процесі руху не змінюється).

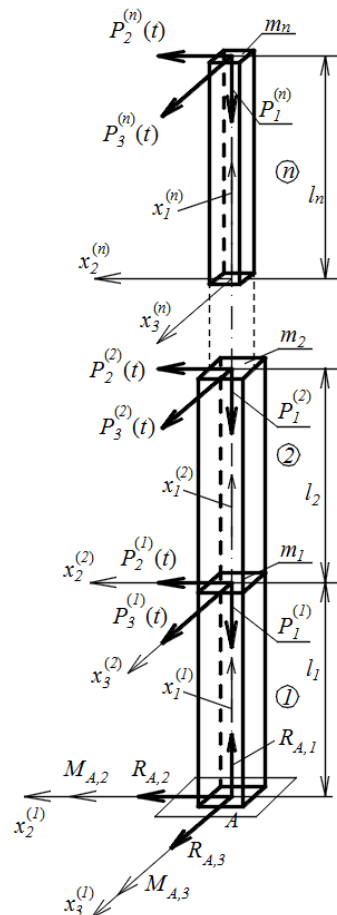


Рис. 1. Розрахункова схема колони

Складаючи систему основних рівнянь динаміки для матеріальних точок, отримуємо

$$m\Delta a = \Delta P + \Delta R, \quad (1)$$

де  $m$  – діагональна матриця мас точок (при цьому кожна маса записується двічі),  $\Delta a$  – вектор-стовпець, елементами якого є прирости проекції прискорень матеріальних точок на осі  $x_i^{(k)}$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta P$  – вектор, елементами якого є прирости величин сил  $P_i^{(k)}$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ), прикладених до вузлів,  $\Delta R$  – аналогічний вектор для приростів реактивних сил, що діють на маси з боку колони. При цьому елементи векторів  $\Delta a$ ,  $\Delta P$  і  $\Delta R$  нумеруються наступним чином:

$$j = 2(k-1) + i - 1, \quad (2)$$

де  $k$  – номер поверху,  $i$  – номер осі  $x_i^{(k)}$ , якої паралельна складова;  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 2, 3$ . На підставі методу лінійних прискорень [15] маємо

$$\Delta a = \frac{6}{(\Delta t)^2} \left[ \Delta v - V \Delta t - \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \right], \quad (3)$$

де  $\Delta t$  – часовий крок,  $\Delta v$  – вектор приростів перемещень мас,  $V$  і  $a$  – аналогічні вектори їх швидкостей і прискорень, визначені на попередньому кроці. Зауважимо, що вектор  $\Delta v$  пов'язаний з вектором  $\Delta R$  наступним чином:

$$\Delta v = -Y \Delta R, \quad (4)$$

де  $Y$  – матриця,  $j$ -м стовпцем якої є стовпець переміщень мас, викликаний одиничною статичною силою, яка прикладеної до маси  $m_k$  і паралельної осі  $x_i^{(k)}$  відповідно до формули (2).

Підставляючи (4) в (3), а потім (3) в (1), отримуємо

$$\Delta R = - \left[ I + \frac{6}{(\Delta t)^2} m Y \right]^{-1} \left\{ \frac{6}{(\Delta t)^2} m \left[ V \Delta t + a \frac{(\Delta t)^2}{2} \right] + \Delta P \right\}, \quad (5)$$

де  $I$  – одинична матриця порядку  $2n$ .

Визначивши з (5)  $\Delta R$ , знаходимо з (4) і (3)  $\Delta v$  і  $\Delta a$ , а потім з формул

$$\Delta V = \left( a + \frac{1}{2} \Delta a \right) \Delta t, \quad \Delta v = V \Delta t + \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{3} \Delta a \right) (\Delta t)^2, \quad (6)$$

визначаємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень:

$$a_{\text{нов}} = a + \Delta a, \quad V_{\text{нов}} = V + \Delta V, \quad v_{\text{нов}} = v + \Delta v. \quad (7)$$

Таким чином, проблема дослідження руху мас звелася до визначення елементів матриці  $Y$ , тобто до визначення коефіцієнтів впливу на кожному кроці розрахунку. Вони істотно залежать від напружено-деформованого стану кожного зі стержнів колони, яке змінюється в процесі навантаження. Для визначення його використовуємо систему диференціальних рівнянь просторового згину залізобетонної балки в припущеннях кутів Крилова, що визначають зміну орієнтації прямокутної системи координат  $y_1, y_2, y_3$  ( $y_2, y_3$  – головні центральні осі інерції поперечного перерізу) щодо вихідної системи координат  $x_1, x_2, x_3$  (пов'язаної з недеформованому станом балки), з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей і пластичності бетону. Ця система має такий вигляд [16]:

$$\sum_{r=1}^3 [X_{i,r}(s) \Delta \xi_r'' + Y_{i,r}(s) \Delta \xi_r' + Z_{i,r}(s) \Delta \xi_r + \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_k(s) \Delta F_k] = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (8)$$

з граничними умовами на лівому кінці

$$\sum_{r=1}^3 V_{i,r} \Delta \xi_r(0) + \sum_{r=1}^3 V_{i,r+3} \Delta \xi_r'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k} \Delta F_k + \Delta M_{o,i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (9)$$

де  $s$  – дугова координата поперечного перерізу балки,  $\Delta \xi$  – вектор з елементами

$$\Delta \xi_1 = \Delta \phi, \quad \Delta \xi_2 = \Delta \psi, \quad \Delta \xi_3 = \Delta \theta, \quad (10)$$

де  $\Delta \phi, \Delta \psi, \Delta \theta$  – прирости кутів Крилова, викликані приростами сили  $F$  і моменту  $M_0$ , прикладених до лівого кінця балки. Відсутні три граничних умови визначаються умовами закріплення балки. Метод побудови функцій  $X_{i,r}(s), Y_{i,r}(s), Z_{i,r}(s), \tilde{U}_k(s)$ , а також величин  $V_{i,r}, V_{i,r+3}, W_{i,k}$  ( $i, r, k = 1, 2, 3$ ) на кожному кроці покрокового методу докладно викладено в [16].

Так як для залізобетонних балок кути  $\phi, \psi, \theta$ , а також  $\phi', \psi', \theta'$  малі, то можна прийняти, що  $\cos \phi = \cos \psi = 1, \sin \phi = \phi, \sin \psi = \psi$ . Також можна знехтувати добутками малих величин. Формули для напрямних косинусів  $\alpha_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ортів осей  $y_1, y_2, y_3$



в системі координат  $x_1, x_2, x_3$  приймуть такий вигляд [16]:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= 1, & \alpha_{1,2} &= \phi, & \alpha_{1,3} &= -\psi; \\ \alpha_{2,1} &= -\phi, & \alpha_{2,2} &= 1, & \alpha_{2,3} &= \theta; \\ \alpha_{3,1} &= \psi, & \alpha_{3,2} &= -\theta, & \alpha_{3,3} &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

З рівняння [16]

$$\Delta x'_{C,i} = \Delta \alpha_{1,i} \quad (i=1,2,3),$$

де  $x_{C,i}$  ( $i=1,2,3$ ) - координати центра ваги перерізу і (3) впливає, що

$$\Delta x'_{C,2} = \Delta \phi, \quad \Delta x'_{C,3} = -\Delta \psi. \quad (12)$$

Тоді рівняння (1) і граничні умови (2) можуть бути представлені так:

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s)\Delta x'''_{C,2} - X_{i,2}(s)\Delta x'''_{C,3} + X_{i,3}(s)\Delta \theta'' + Y_{i,1}(s)\Delta x''_{C,2} - Y_{i,2}(s)\Delta x''_{C,3} + \\ + Y_{i,3}(s)\Delta \theta' + Z_{i,1}(s)\Delta x'_{C,2} - Z_{i,2}(s)\Delta x'_{C,3} + Z_{i,3}(s)\Delta \theta + \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}(s)\Delta F_k = 0 \quad (i=1,2,3); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_{i,1}\Delta x'_{C,2}(0) - V_{i,2}\Delta x'_{C,3}(0) + V_{i,3}\Delta \theta(0) + V_{i,4}\Delta x''_{C,2}(0) - V_{i,5}\Delta x''_{C,3}(0) + \\ + V_{i,6}\Delta \theta'(0) + \sum_{k=1}^3 W_{i,k}\Delta F_k + \Delta M_i(0) = 0 \quad (i=1,2,3). \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо рівність (2.28) [1] при  $s=0$  в наступному вигляді

$$\Delta Q_m(0) = -\sum_{k=1}^3 \beta_{k,m}(0)\Delta F_k \quad (m=1,2,3), \quad (15)$$

де  $\beta_{k,m}(0) = \alpha_{m,k}(0)$ ;  $k, m=1,2,3$ . Звідси слідує, що

$$\Delta F_m = -\sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0)\Delta Q_k(0) \quad (m=1,2,3), \quad (15a)$$

де  $\Delta Q_k(s)$  - прирости складових головного вектора внутрішніх зусиль в поперечному перерізі балки.

З урахуванням (15a) рівняння (4) можуть бути записані так

$$\begin{aligned} X_{i,1}(s)\Delta x'''_{C,2} - X_{i,2}(s)\Delta x'''_{C,3} + X_{i,3}(s)\Delta \theta'' + Y_{i,1}(s)\Delta x''_{C,2} - Y_{i,2}(s)\Delta x''_{C,3} + Y_{i,3}(s)\Delta \theta' + \\ + Z_{i,1}(s)\Delta x'_{C,2} - Z_{i,2}(s)\Delta x'_{C,3} + Z_{i,3}(s)\Delta \theta = \sum_{m=1}^3 \tilde{U}_{i,m}\Delta Q_m(0) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\tilde{U}_{i,m} = \sum_{k=1}^3 \tilde{U}_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$ ,

а граничні умови (5) - так

$$\begin{aligned} V_{i,1}\Delta x'_{C,2}(0) - V_{i,2}\Delta x'_{C,3}(0) + V_{i,3}\Delta \theta(0) + V_{i,4}\Delta x''_{C,2}(0) - V_{i,5}\Delta x''_{C,3}(0) + V_{i,6}\Delta \theta'(0) = \\ = \sum_{m=1}^3 \tilde{W}_{i,m}\Delta Q_m(0) - \Delta M_i(0) \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\tilde{W}_{i,m} = \sum_{k=1}^3 W_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$ .

Введемо позначення

$$\begin{aligned} y_1 &= \Delta x_{C,2}(0), \quad y_2 = \Delta x_{C,3}(0), \quad y_3 = \Delta x'_{C,2}(0), \quad y_4 = \Delta x'_{C,3}(0), \quad y_5 = \Delta\theta(0), \\ y_6 &= \Delta x''_{C,2}(0), \quad y_7 = \Delta x''_{C,3}(0), \quad y_8 = \Delta\theta'(0). \end{aligned} \quad (18)$$

Крім того, через  $z_{n,k}(s)$  ( $n=1,2,3; k=1,2,\dots,8$ ) позначимо фундаментальну систему розв'язків задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь, що відповідає системі (7). Це означає, що  $z_{1,k}(s) = \Delta x_{C,2}(s)$ ,  $z_{2,k}(s) = \Delta x_{C,3}(s)$ ,  $z_{3,k}(s) = \Delta\theta(s)$  ( $k=1,2,\dots,8$ ), при виконанні наступних умов:

$$y_p = \delta_{p,k} \quad (p=1,2,\dots,8),$$

де  $\delta_{p,k}$  – символ Кронекера. Потім через  $z_{u,r,m}(s)$  ( $r,m=1,2,3$ ) позначимо множину частинних розв'язків  $\Delta x_{u,C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{u,C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta_u(s)$  системи (7) при нульових початкових умовах і при стовпці правих частин, що складається з елементів  $\tilde{U}_{i,m}$  ( $m=1,2,3$ ).

Для наближеної побудови цих рішень розіб'ємо балку по довжині на ряд ділянок, у межах кожного з яких коефіцієнти  $X_{i,r}(s)$ ,  $Y_{i,r}(s)$ ,  $Z_{i,r}(s)$  вважатимемо постійними і рівними  $X_{i,r}(s_m)$ ,  $Y_{i,r}(s_m)$ ,  $Z_{i,r}(s_m)$  ( $s_m$  – дугова координата початку ділянки,  $m$  - його номер) відповідно. Застосовуючи теорію лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, знаходимо рішення  $\Delta x_{C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta(s)$  на першій ділянці при відповідних початкових умовах. Потім знаходимо вирішення цієї системи на другій ділянці, використовуючи в якості початкових умов значення функцій  $\Delta x_{C,2}(s)$ ,  $\Delta x_{C,3}(s)$ ,  $\Delta\theta(s)$  і їх похідних в кінці першої ділянки і т.д.

Вирішуючи систему алгебраїчних рівнянь (8) щодо  $\Delta\theta'(0)$ ,  $\Delta x''_{C,2}(0)$  і  $\Delta x''_{C,3}(0)$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta x''_{C,2}(0) &= \tilde{V}_{1,1}\Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{1,2}\Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{1,3}\Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+3}\Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{1,m+6}\Delta Q_m(0); \\ \Delta x''_{C,3}(0) &= \tilde{V}_{2,1}\Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{2,2}\Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{2,3}\Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+3}\Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{2,m+6}\Delta Q_m(0); \\ \Delta\theta'(0) &= \tilde{V}_{3,1}\Delta x'_{C,2}(0) + \tilde{V}_{3,2}\Delta x'_{C,3}(0) + \tilde{V}_{3,3}\Delta\theta(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+3}\Delta M_m(0) + \sum_{m=1}^3 \tilde{V}_{3,m+6}\Delta Q_m(0). \end{aligned} \quad (19)$$

Рішення однорідної системи, що відповідає системі (7) (в подальшому будемо називати її однорідної системою (7)), а також їх похідні можуть бути виражені через фундаментальні рішення задачі Коші наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta x_{C,2}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{1,j}(s), \quad \Delta x'_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{1,j}(s), \quad \Delta x''_{C,2}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{1,j}(s); \\ \Delta x_{C,3}(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{2,j}(s), \quad \Delta x'_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{2,j}(s), \quad \Delta x''_{C,3}(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z''_{2,j}(s); \\ \Delta\theta(s) &= \sum_{j=1}^8 y_j z_{3,j}(s), \quad \Delta\theta'(s) = \sum_{j=1}^8 y_j z'_{3,j}(s). \end{aligned} \quad (20)$$

Для знаходження  $\Delta M_i(s)$  і  $\Delta Q_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) використовуємо формули (2.38) і (2.38a) [16]:

$$\Delta M_i = \sum_{r=1}^3 (M_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{r=1}^3 (M_i)_{r+3}^{(3)} \Delta \xi'_r + \sum_{k=1}^3 (M_i)_k^{(4)} \Delta F_k ;$$

$$\Delta Q_i = \sum_{r=1}^3 (Q_i)_r^{(3)} \Delta \xi_r + \sum_{r=1}^3 (Q_i)_{r+3}^{(3)} \Delta \xi'_r + \sum_{k=1}^3 (Q_i)_k^{(4)} \Delta F_k \quad (i=1,2,3).$$

З (6) отримуємо

$$\Delta M_i(s) = \sum_{r=1}^3 (M_i)_r^{(3)}(s) \Delta \xi_r(s) + \sum_{r=1}^3 (M_i)_{r+3}^{(3)}(s) \Delta \xi'_r(s) - \sum_{m=1}^3 (M_i^*)_m^{(4)}(s) \Delta Q(0)_m \quad (i=1,2,3),$$

$$\Delta Q_i(s) = \sum_{r=1}^3 (Q_i)_r^{(3)}(s) \Delta \xi_r(s) + \sum_{r=1}^3 (Q_i)_{r+3}^{(3)}(s) \Delta \xi'_r(s) - \sum_{m=1}^3 (Q_i^*)_m^{(4)}(s) \Delta Q(0)_m \quad (i=1,2,3),$$
(21)

де

$$(M_i^*)_m^{(4)}(s) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0) (M_i)_k^{(4)}(s), \quad (Q_i^*)_m^{(4)}(s) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{m,k}(0) (Q_i)_k^{(4)}(s). \quad (22)$$

Використовуючи (2а) і (3а), формули (12) можна записати так:

$$\Delta M_i(s) = (\tilde{M}_i)_1(s) \Delta x'_2(s) - (\tilde{M}_i)_2(s) \Delta x'_3(s) + (\tilde{M}_i)_3(s) \Delta \theta(s) +$$

$$+ (\tilde{M}_i)_4(s) \Delta x''_2(s) - (\tilde{M}_i)_5(s) \Delta x''_3(s) + (\tilde{M}_i)_6(s) \Delta \theta'(s) - \sum_{m=1}^3 (\tilde{M}_i)_m(s) \Delta Q_m(0) \quad (i=1,2,3);$$

$$\Delta Q_i(s) = (\tilde{Q}_i)_1(s) \Delta x'_2(s) - (\tilde{Q}_i)_2(s) \Delta x'_3(s) + (\tilde{Q}_i)_3(s) \Delta \theta(s) +$$

$$+ (\tilde{Q}_i)_4(s) \Delta x''_2(s) - (\tilde{Q}_i)_5(s) \Delta x''_3(s) + (\tilde{Q}_i)_6(s) \Delta \theta'(s) - \sum_{m=1}^3 (\tilde{Q}_i)_m(s) \Delta Q_m(0) \quad (i=1,2,3).$$
(23)

Тут

$$(\tilde{M}_i)_r(s) = (M_i)_r^{(3)}(s), \quad (\tilde{Q}_i)_r(s) = (Q_i)_r^{(3)}(s) \quad (i=1,2,3; r=1,2,\dots,6),$$

$$(\tilde{M}_i)_m(s) = (M_i^*)_m^{(4)}(s), \quad (\tilde{Q}_i)_m(s) = (Q_i^*)_m^{(4)}(s) \quad (i,m=1,2,3).$$

Для кожного зі стержнів колони можна записати наступну рівність

$$\Delta w(s) = \Delta w_{одн}(s) + \Delta w_{\psi}(s). \quad (24)$$

В цієї рівності  $\Delta w_{одн}(s)$  – вектор з елементами

$$\Delta w_{одн,1}(s) = \Delta x_{C,2}(s), \quad \Delta w_{одн,2}(s) = \Delta x_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,3}(s) = \Delta x'_{C,2}(s),$$

$$\Delta w_{одн,4}(s) = \Delta x'_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,5}(s) = \Delta \theta(s), \quad \Delta w_{одн,6}(s) = \Delta x''_{C,2}(s),$$

$$\Delta w_{одн,7}(s) = \Delta x''_{C,3}(s), \quad \Delta w_{одн,8}(s) = \Delta \theta'(s),$$
(25)

отриманими з рішення однорідної системи (7), а  $\Delta w_{одн}(s)$  – вектор з тими ж елементами, отриманими з приватного рішення  $\Delta x_{\psi,C,2}(s), \Delta x_{\psi,C,3}(s), \Delta \theta_{\psi}(s)$  системи (7) при нулевих початкових умовах. Очевидно,

$$\Delta w_{\psi,j}(s) = \sum_{m=1}^3 z_{\psi,j,m}(s) \Delta Q_m(0) \quad (j=1,2,3). \quad (26)$$

Тут  $z_{q,j,m}(s)$  – частинний розв’язок системи (7) при нульових початкових умовах і з правою частиною, яка дорівнює  $\tilde{U}_{i,m}$  ( $i=1,2,3$ ).

Представимо  $\Delta w_{одн}(s)$  в наступному вигляді

$$\Delta w_{одн}(s) = A(s)\Delta w(0), \quad (27)$$

тобто

$$\Delta w_{одн,i} = \sum_{j=1}^8 A_{ij}(s)\Delta w_j(0).$$

З формул (11) отримуємо

$$\begin{aligned} A_{1,j} &= z_{1,j}(s), \quad A_{2,j} = z_{2,j}(s), \quad A_{3,j} = z'_{1,j}(s), \quad A_{4,j} = z'_{2,j}(s), \\ A_{5,j} &= z_{3,j}(s), \quad A_{6,j} = z''_{1,j}(s), \quad A_{7,j} = z''_{2,j}(s), \quad A_{8,j} = z'_{3,j}(s) \quad (j=1,2,\dots,8). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким чином,  $\Delta w(s)$  представляється в наступному вигляді

$$\Delta w(s) = A(s)\Delta w(0) + \Delta w_q(s). \quad (29)$$

Для побудови першого стовпчика матриці  $Y$  чинимо так: покладемо  $\Delta P_2^{(1)} = 1$ ,  $\Delta P_3^{(1)} = 0$ ,  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i=2,3; k=2,\dots,n$ ). З умов рівноваги колони визначаємо  $\Delta R_{A,i}$  ( $i=1,2,3$ ),  $\Delta M_{A,i}$  ( $i=2,3$ ). У формулах (8) і (9) для стержня 1 вважаємо  $\Delta F_i^{(1)} = \Delta R_{A,i}$  ( $i=1,2,3$ ),  $\Delta M_{0,i}^{(1)}(0) = \Delta M_{A,i}$  ( $i=2,3$ ), ( $\Delta M_{A,i}$  дорівнює нулю при навантаженні на колону, представленою на рис. 1). Крім того, з умов закріплення в точці  $A$  слідує

$$\begin{aligned} \Delta w_1^{(1)}(0) &= \Delta x_{C,2}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_2^{(1)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_3^{(1)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(1)}(0) = 0, \\ \Delta w_4^{(1)}(0) &= \Delta x_{C,3}^{(1)}(0) = 0, \quad \Delta w_5^{(1)}(0) = \Delta \theta^{(1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Значення  $\Delta w_6^{(1)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(1)}(0)$ ,  $\Delta w_7^{(1)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(1)}(0)$ ,  $\Delta w_8^{(1)}(0) = \Delta \theta^{(1)}(0)$  визначаються з рівностей (15) і (19). Проводячи далі обчислення відповідно до формулами (20) - (29) визначаємо значення елементів вектора  $\Delta w^{(1)}(s)$  ( $0 \leq s \leq l_1$ ) для стержня 1.

З умови жорсткого з’єднання стержнів 1 і 2 отримуємо  $\Delta w_r^{(2)}(0) = \Delta w_r^{(1)}(l_1)$  ( $r=1,2,\dots,5$ ). Так само як і для стержня 1,  $\Delta w_6^{(2)}(0) = \Delta x_{C,2}^{(2)}(0)$ ,  $\Delta w_7^{(2)}(0) = \Delta x_{C,3}^{(2)}(0)$ ,  $\Delta w_8^{(2)}(0) = \Delta \theta^{(2)}(0)$  визначаються з рівностей (15) і (19). Потім за формулами (20) - (29) визначаються значення елементів вектора  $\Delta w^{(2)}(s)$  ( $0 \leq s \leq l_2$ ). У формулах (8) і (9) для стержня 2 вважаємо  $\Delta F_1^{(2)} = \Delta R_{A,1} - \Delta P_1^{(1)}$ ,  $\Delta F_i^{(2)} = \Delta R_{A,i} + \Delta P_i^{(1)}$  ( $i=2,3$ ),  $\Delta M_{0,i}^{(2)}(0) = \Delta M_i^{(1)}(l_1)$  ( $i=1,2,3$ ) при цьому величини  $\Delta M_i^{(1)}(l_1)$  ( $i=2,3$ ) обчислюються за формулою (23). Далі продовжуємо таким же чином, поки не визначимо  $\Delta w_r^{(k)}(l_k)$  ( $r=1,2,\dots,8$ ) для усіх  $k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ). Елементами першого стовпчика матриці  $Y$  є величини  $\Delta x_i^{(k)}(l_k)$  ( $k=1,2,\dots,n; i=2,3$ ) (тобто величини  $\Delta w_{i-1}^{(k)}(l_k)$ ), впорядковані відповідно до формули (2).

Для побудови другого стовпця матриці  $Y$  прикладаємо наступне навантаження:  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i=2,3; k=1,2,\dots,n$ ) за винятком  $\Delta P_3^{(1)}$ , яке дорівнює одиниці. Далі діємо так само, як діяли при побудові першого стовпця матриці  $Y$ . Для побудови елементів

третього стовпця матриці  $Y$  вважаємо  $\Delta P_i^{(k)} = 0$  ( $i = 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$ ) за винятком  $\Delta P_2^{(2)} = 1$  і т.д. і т.п. поки не побудуємо всі стовпці матриці  $Y$ . Після побудови матриці  $Y$  з (5) визначаємо  $\Delta R$ , потім з (4) і (3) знаходимо  $\Delta v$  і  $\Delta a$ . За формулами (6) обчислюємо прирости прискорень, швидкостей і переміщень матеріальних точок. Завершується крок обчисленням нових значень прискорень, швидкостей і переміщень відповідно за формулами (7).

**Приклад.** До двоступеневої залізобетонної колони з двома зосередженими масами  $M_1$  і  $M_2$  величиною  $m_1 = m_2 = 60T$  в момент часу  $t = 0$  прикладаються два синусоїдальних імпульсу: до маси  $M_1 - F_3(t)$  в напрямку осі  $x_3$  і до маси  $M_2 - F_2(t)$  в напрямку осі  $x_2$  (рис. 2а). Графік їх зміни наведено на рис. 2б ( $F$  у  $\kappa H$ ,  $t$  у секундах). Довжини ділянок колони  $l_1 = l_2 = 5m$ . Поперечні перерізи ділянок представляють собою квадрати зі сторонами  $0,5m$  і  $0,4m$ . Армування – дванадцять стержнів діаметром  $10mm$ , розташованих симетрично як щодо осі  $x_2$ , так і щодо осі  $x_3$ , матеріал – сталь марки А-III. Характеристики бетону:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 MPa$ ,  $R_c = 19 MPa$ ,  $R_p = 1,9 MPa$ .

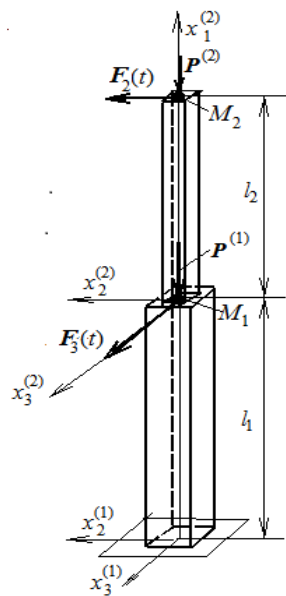


Рис. 2а. Навантаження на колону

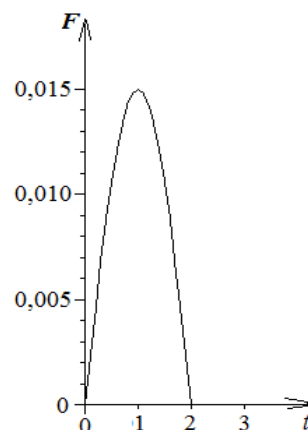


Рис. 2б. Графік імпульсу

Після впливу імпульсів колону починає здійснювати вільні коливання. Використовуючи алгоритм, викладений вище, для кожної з ділянок колони і урахуваючи умови їх сполучення, а також (21) - (27), будуємо графіки зміни координат  $x_2$  і  $x_3$  мас  $M_1$  і  $M_2$ . Ці графіки наведені на рис. 3 і 4. Помітно накопичення залишкових деформацій.

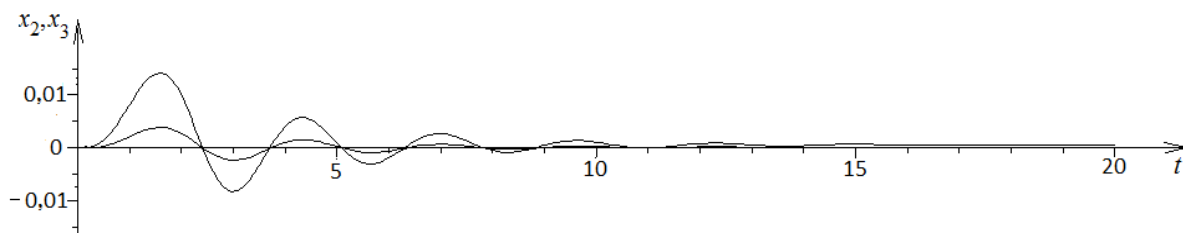


Рис. 3. Графік зміни координат зосередженої маси  $M_1$

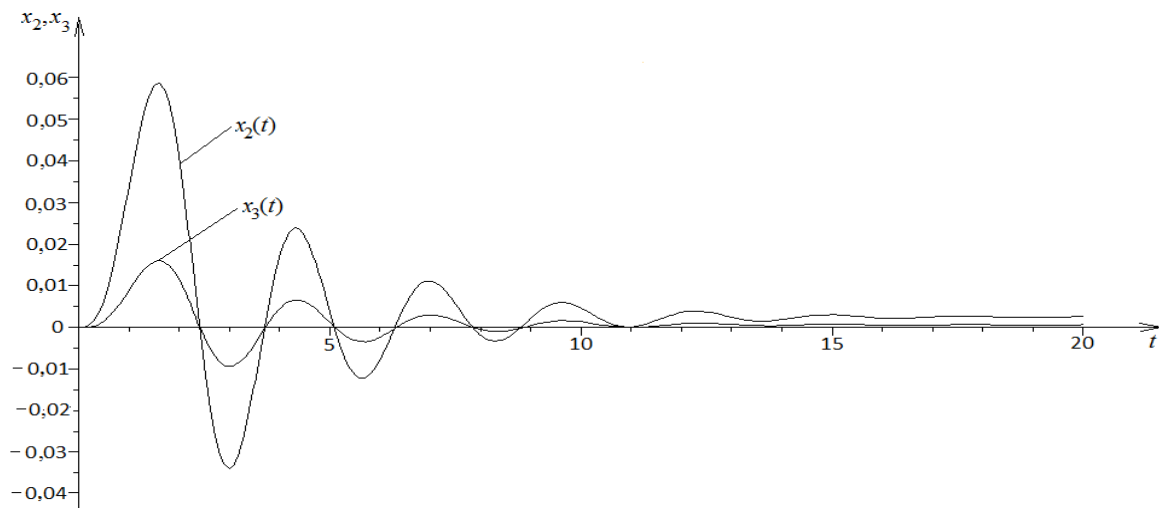


Рис. 4. Графік зміни координат зосередженої маси  $M_2$

## 6 ВИСНОВКИ

Запропоновано метод дослідження динамічних задач згину залізобетонних колон, заснований на методі граничних елементів, тобто без використання методу скінченних елементів, який приводить до вирішення багаторозмірних лінійних алгебраїчних систем, а, отже, до появи похибок розрахунку.

Запропонований метод може бути використаний при побудові методів розв'язання динамічних задач для залізобетонних каркасних споруд будь-якої форми і будь-яких конструктивних особливостей.

## Література

1. Azuhata T. Seismic performance estimation of asymmetric buildings based on the capacity spectrum method / T. Azuhata, T. Saito, M. Takayama, K. Nagahara // 12wcee-2000. 2322. p. 1-8.
2. Bertero R. D. Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach / R. D. Bertero, V. V. Bertero // Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 31,3, Mar. 2002. p. 627-652. [doi.org/10.1002/eqe.146](https://doi.org/10.1002/eqe.146)
3. Fajfar P. A. Nonlinear Analysis Method for Performance Based Seismic Design / P. Fajfar // Earthquake Spectra, Vol. 16, No. 3, pp. 573-592. August 2000. [doi.org/10.1193/1.1586128](https://doi.org/10.1193/1.1586128)
4. Немчинов Ю. И. Расчет колебаний зданий и прочности железобетонных стен на заданные акселерограммы / Ю. И. Немчинов, Н. Г. Марьенков // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2013, випуск № 49. С.15-25.
5. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). / Ю. И. Немчинов // – Киев: Будівельник, 1980. 232 с.
6. ПК ЛИРА. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. Справочно-теоретическое пособие под ред. академика АИИ Украины А.С. Городецкого. – Киев – М.: 2003. 464с.
7. Городецкий А. С. Прямой динамический расчет зданий на сейсмические воздействия с учетом физически нелинейной работы материала конструкций / А. С. Городецкий, Ю. Д. Гераймович // Будівельні конструкції, 2006, випуск 64. С. 80-87.
8. Nakasone Y. Engineering analysis with ANSYS software / Y. Nakasone, S. Yoshimoto, T. A. Stolarski // Oxford, Burlington, MA : Butterworth-Heinemann, 2006. 456 p.
9. Freeman S. A. Prediction of Response of Concrete Buildings to Severe Earthquake Motion. / S. A. Freeman // Douglas McHenry International Symposium on Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, Michigan., 1978, P. 589-605.

10. Fujii K. Simplified nonlinear analysis procedure for single-story asymmetric buildings / K. Fujii, Y. Nakano, Y. Sanada // Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, Vol. 4, № 2, 2004. [doi.org/10.5610/jaee.4.2\\_1](https://doi.org/10.5610/jaee.4.2_1)
11. Requena M. Evaluation of a simplified method for the determination of the non linear seismic response of RC frames/ M. Requena, A. G. Ayala // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000: paper № 2109.
12. Nagao T. Case Studios on Performance Based Seismic Design Using Capacity Spectrum Method / T. Nagao, H. Mukai, D. Nishikawa // Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000, paper № 0694.
13. Оробей В. Ф. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем / В. Ф. Оробей, А. В. Ковров // Применение метода граничных элементов. Одесса, 2004. 123 с.
14. Оробей В. Ф. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов // Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та, Инженерно-строительный журнал, №4 (22), СПб, 2011. С. 33-39. [doi.org/10.5862/МСЕ.22.6](https://doi.org/10.5862/МСЕ.22.6)
15. Ньюмарк Н. Основы сейсмостойкого строительства / Н. Ньюмарк, Э. Розенблюэт // М.: Стройиздат, 1980. 344 с.
16. Фомин В. М. Построение дифференциальных уравнений пространственного железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона / В. М. Фомин // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну, Технічні науки, 2017, № 1 (106). С. 43-48.

## References

1. Azuhata, T., Saito, T., Takayama, M., Nagahara, K. (2000). Seismic performance estimation of asymmetric buildings based on the capacity spectrum method, 12, 1-8.
2. Bertero, Raul D., Bertero, Vitelmo V. (2002). Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 31, 3, 627-652. [doi.org/10.1002/eqe.146](https://doi.org/10.1002/eqe.146)
3. Fajfar, P. (2000). A Nonlinear Analysis Method for Performance Based Seismic Design, Earthquake Spectra, 16 (3), 573-592. [doi.org/10.1193/1.1586128](https://doi.org/10.1193/1.1586128)
4. Nemchinov, U. I. Marienkov, N. G. (2013). Analysis of building vibrations and the strength of reinforced concrete walls at specified accelerograms, Bulletin of Odessa state Academy of Civil Engineering and Architecture – Odessa: Vneshreclamservice, 49, 15-25.
5. Nemchinov U. I. (1980). Analysis of space constructions (Finite Element Method).– Kiev: Budivel'nik, 232.
6. PC LIRA. (2003). Software package for structural analysis and design. Reference-theoretical manual, ed. by academician of Ukrainian AES A.S. Gorodetsky. – Kiev – M.: 46.
7. Gorodetsky, A. S., Geraimovich, U. D. (2006). Direct dynamic analysis of buildings for seismic effects, taking into account physically non-linear work of the structural material, Budivelny konstruktzii, 64, 80-87.
8. Nakasone, Y., Yoshimoto, S., Stolarski, T. A. (2006). Engineering analysis with ANSYS software. Oxford, Burlington, MA : Butterworth-Heinemann, 456.
9. Freeman, S. A. (1978). Prediction of Response of Concrete Buildings to Severe Earthquake Motion. Douglas McHenry International Symposium on Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 589-605.
10. Fujii, K., Nakano, Y., Sanada, Y. (2004). Simplified nonlinear analysis procedure for single-story asymmetric buildings. Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, 4 (2). [doi.org/10.5610/jaee.4.2\\_1](https://doi.org/10.5610/jaee.4.2_1)
11. Requena, M., Ayala, A. G. (2000). Evaluation of a simplified method for the determination of the non linear seismic response of RC frames. Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2109.
12. Nagao, T., Mukai, H., Nishikawa, D. (2000). Case Studios on Performance Based Seismic Design Using Capacity Spectrum Method. Proceedings of 12 World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 0694.



13. Orobey, V. F., Kovrov, A. V. (2004). The solution of problems of statics, dynamics and stability of rod systems. Application of the boundary element method. Odessa, 123.
14. Orobey, V. F., Sur'yaninov, N. G. (2011). Osnovnye polozeniya chislenno-analiticheskogo varianta MGE'. Trudy Sankt-Peterburgskogo politekhnich. un-ta, Inzhenerno-stroitel'ny'j zhurnal, 4 (22), 33-39. [doi.org/10.5862/MCE.22.6](https://doi.org/10.5862/MCE.22.6)
15. Newmark, N. M., Rosenblueth, E. (1971). Fundamentals of earthquake engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 640.
16. Fomin, V. M. (2017). Construction of differential equations of spatial bending of reinforced concrete beams and frames taking into account physical and geometric non-linearities and plasticity of concrete. Bulletin of Kiev National University of technology and design, Technichni nauki, 1 (106), 43-48.

**Фомін Володимир Михайлович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
vmfomin39@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-4814-6415

**Фоміна Інна Петрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
fomina@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0001-7366-1537

*Для посилань:*

Фомін В. М. Застосування методу граничних елементів при дослідженні коливань залізобетонної колони змінного перерізу з урахуванням нелінійних і пластичних властивостей бетону / В. М. Фомін, І. П. Фоміна // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 55–67.

*For references:*

Fomin, V., Fomina, I. (2020). Application of the boundary element method in investigation of vibrations reinforced concrete column of variable cross-section taking into account the nonlinear and plastic properties of concrete. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (1), 55 – 67

UDK 624.04

## FORCED VIBRATIONS OF ARCH SYSTEMS IN ITS PLANE

P. Balduk<sup>1</sup>, I. Korneeva<sup>1</sup>, S. Neutov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The work is devoted to solving the problem of forced oscillations of a circular arch using the numerical-analytical method of boundary elements. The algorithm of the method can conditionally be divided into two parts - analytical and numerical. The first of this two parts involves obtaining in an analytical form a complete system of fundamental solutions of the original differential equation, constructing the Green's function and the components of the vector of external loads, which are the problems to be solved in this article. An ordinary sixth-order differential equation is obtained that describes the forced oscillations of an arch in its plane. It differs from the similar equation for free oscillations obtained earlier only in the presence of the right-hand side. This means that, as with free oscillations, 10 solutions are possible here, and the analytical expressions derived from 360 fundamental functions for these solutions remain unchanged. For one of the variants of the roots of the characteristic equation, an analytical expression of the Green's function is constructed, a connection is established between the Green's function and one of the fundamental functions, which is also valid for other values of the roots of the characteristic equation. Using impulse functions and splines, the arch load vector is constructed.

The presented work implements the analytical component of the numerical-analytical method of boundary elements. The numerical implementation of the algorithm and the comparison of the results with the results of finite element analysis determine the direction of further research.

It is noted that the cost of computer resources when implementing a program for calculating an arch system using the boundary element method is minimal, since it is necessary to solve a system of only twelve algebraic equations, which is significantly less than when using the finite element method. The results obtained allow us to perform dynamic calculations for forced vibrations any arched systems of arbitrary configuration.

**Keywords:** boundary elements method, circular arch, forced vibrations, fundamental functions, Green's function.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ АРОЧНЫХ СИСТЕМ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Балдук П. Г.<sup>1</sup>, Корнеева И. Б.<sup>1</sup>, Неутов С. Ф.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**Аннотация:** Работа посвящена решению задачи о вынужденных колебаниях круговой арки численно-аналитическим методом граничных элементов. Алгоритм метода условно можно разбить на две части – аналитическую и численную. Первая из них предполагает получение в аналитическом виде полной системы фундаментальных решений исходного дифференциального уравнения, построение функции Грина и компонентов вектора внешних нагрузок, что и является задачами, решаемыми в данной статье. Получено обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка, описывающее вынужденные колебания арки в своей плоскости. Оно отличается от аналогичного уравнения при свободных колебаниях, полученного ранее, только наличием правой части. Это означает, что, как и при свободных колебаниях, здесь возможны 10 вариантов решения, причем, остаются неизменными выведенные ранее аналитические выражения 360 фундаментальных функций для этих решений. Для одного из вариантов корней характеристического уравнения построено аналитическое выражение функции Грина, установлена связь между функцией Грина и одной из фундаментальных функций, которая справедлива и для других значений корней



характеристического уравнения. С использованием импульсных функций и сплайнов построен вектор нагрузки на арку.

Представленная работа реализует аналитическую составляющую численно-аналитического метода граничных элементов. Численная реализация алгоритма и сравнение полученных результатов с результатами конечно-элементного анализа определяют направление дальнейших исследований.

Отмечено, что затраты компьютерных ресурсов при реализации программы расчета арочной системы методом граничных элементов являются минимальными, так как приходится решать систему только двенадцати алгебраических уравнений, что существенно меньше, чем при использовании метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** метод граничных элементов, круговая арка, вынужденные колебания, фундаментальная функция, функция Грина.



## 1 INTRODUCTION

Arches are perhaps the most ancient building structures. As supporting structures they were used as far back as Assyria. The first steel arches appeared in the 40s of the XIXth century. Subsequently, they became widespread in various fields. Currently, arches are used for industrial and public buildings, hangars, warehouses, greenhouses, etc. In construction, arched bridges of various designs are widespread. Their calculation for static loads has been developed quite fully, and for dynamic loads нагрузки much worse. Meanwhile, a significant increase in vehicle speeds and an increase in their carrying capacity leads to an increase in static and dynamic loads. In addition, new high-strength materials have appeared, structural forms and calculation methods are being improved, and all this leads to a decrease in the material consumption of structures, and, consequently, to their greater sensitivity to dynamic effects due to a decrease in rigidity.

In this regard, the development of methods for solving problems of free and forced vibrations of arches and arch systems continues to be relevant.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND PROBLEM FORMULATION

The first publications devoted to the dynamic calculations of arches and arch systems appeared a long time ago, and were primarily associated with the construction of bridges. These are the works of F. Kh. Brown [1], K. Federhofer [2], A. B. Morgaevsky [3], I. M. Rabinovich [4], N. K. Snitko [5], A. F. Smirnov [6] and several other researchers. Then, over a sufficiently long period, no serious results were observed in the field of the dynamics of arches. And with the development of computer technology and the advent of new methods of calculating work in this direction, especially in foreign countries, they have intensified.

P. Chidamparam and A. W. Leissa [7] summarized all the literature published at that time (1993) on the vibrations of curved rods, beams, rings, and arches of arbitrary shape. The extensive bibliography cited in their article includes 407 references, including to the few works of Russian-speaking authors. However, the vast majority of work was related to the use of numerical methods and, mainly, the finite element method and its various modifications. There are a lot of such works, we note only some of them [8-13], which seem to be the most interesting. The trend towards the use of numerical methods continued in the future. There are also publications in the form of articles [14, 15] or sections in books [16, 18], where analytical approaches are proposed, however, there are many limitations associated with loads, geometry, or boundary conditions.

## 3 AIM AND PURPOSE OF RESEARCH

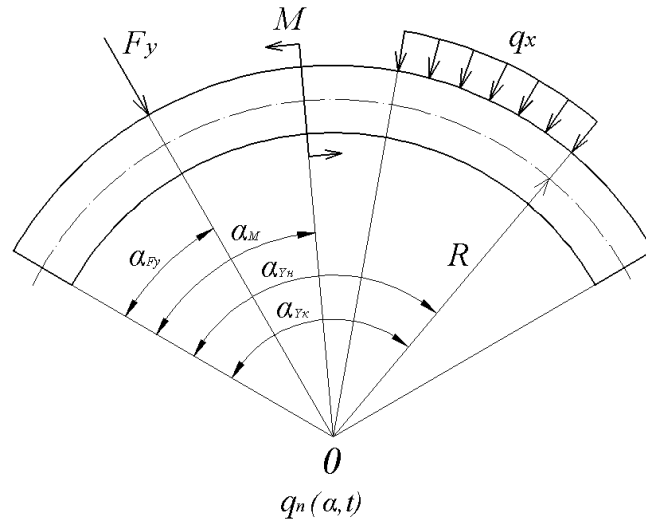
The aim of this work is to solve the problem of forced vibrations of the arch by the numerical-analytical method of boundary elements (NA BEM), the main provisions of which are described in [19-21].

The application of the proposed approach has already made it possible to obtain solutions to a wide class of problems of statics, dynamics and stability of rod systems, plates and shells, including a number of problems for which such solutions were absent, and also proved to be very effective for systems with discrete-continuous distribution of parameters .

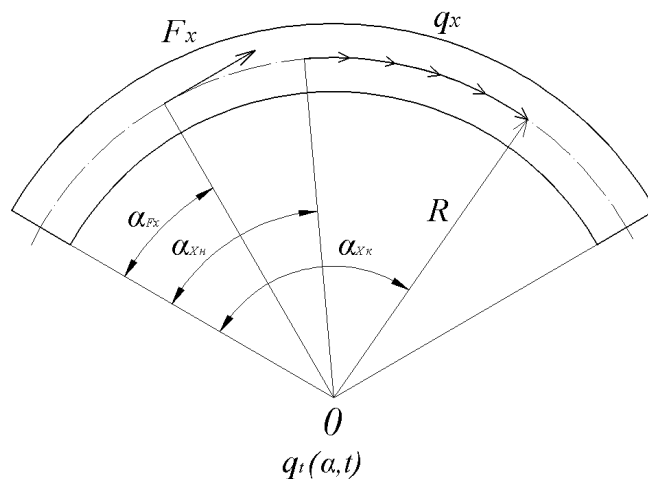
The algorithm of the NA BEM can conditionally be divided into two parts - analytical and numerical. The first of these involves obtaining in an analytical form a complete system of fundamental solutions of the original differential equation, constructing the Green's function and the components of the vector of external loads, which are the problems to be solved in this article.

## 4 RESEARCH RESULTS

Let us consider the forced oscillations of a circular arch occurring under the action of normal  $q_n(\alpha, t)$  (Fig. 1) and tangential  $q_t(\alpha, t)$  (Fig. 2) forcing loads of arbitrary form.



**Fig. 1.** Circular arch under normal driving forces



**Fig. 2.** Circular arch, tangential driving forces

In this case, the equilibrium equations [5] will be supplemented by the corresponding terms:

$$\frac{\partial Q(\alpha, t)}{\partial \alpha} = -N(\alpha, t) + mR \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} - q_n(\alpha, t)R; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N(\alpha, t)}{\partial \alpha} = -Q(\alpha, t) + mR \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} - q_t(\alpha, t)R. \quad (2)$$

And if we take into account the inertia forces, the presence of which is due to angular displacements, then the third equilibrium equation has the form

$$\frac{\partial M(\alpha, t)}{\partial \alpha} = Q(\alpha, t)R - \rho I \left[ \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 v(\alpha, t)}{\partial \phi \partial t^2} \right], \quad (3)$$



where  $\rho$  – material density;  $I$  – axial moment of inertia of the cross section;  $m$  – linear mass.

The second term in the right-hand side of (3) represents the moment of inertia of rotation

$$M_{\text{rot}}(\alpha, t) = -\rho I \varepsilon ds = -\rho I \left[ \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial \varphi \partial t^2} \right],$$

where

$\varepsilon = \partial^2 \phi(\alpha, t) / \partial t^2$  – angular acceleration of the angle of rotation of the cross section of the arch.

Taking into account the inertia of rotation significantly complicates the third equation of equilibrium, but does not significantly affect the final result, therefore, in the future we will use (3) in a simplified form

$$\frac{\partial M(\alpha, t)}{\partial \alpha} = Q(\alpha, t)R. \quad (4)$$

Using the known relations between stresses, deformations and displacements, we express the normal force and bending moment through displacements  $u$  and  $v$ :

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon = \frac{EA}{R}(u' - v); \\ M &= -EI\chi = -\frac{EI}{R^2}(u' + v''). \end{aligned} \quad (5)$$

In view of (4) and (5), equations (1) and (2) are written as:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{R^3} \frac{\partial^3 u(\alpha, t)}{\partial \alpha^3} - \frac{EI}{R^3} \frac{\partial^4 v(\alpha, t)}{\partial \alpha^4} + \frac{EA}{R} \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial \alpha} - \frac{EA}{R} v(\alpha, t) - mR \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial t^2} &= -q_n(\alpha, t)R; \\ \frac{EA}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial \alpha} - v(\alpha, t) \right] + \frac{EI}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 v(\alpha, t)}{\partial \alpha^2} \right] - mR \frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} &= -q_t(\alpha, t)R. \end{aligned}$$

We apply the Fourier method of variables separation to these equations, setting

$$\begin{aligned} u(\alpha, t) &= u(\alpha)T(t), \quad q_n(\alpha, t) = q_n(\alpha)T(t), \\ v(\alpha, t) &= v(\alpha)T(t), \quad q_t(\alpha, t) = q_t(\alpha)T(t), \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{R^3} u''''T - \frac{EI}{R^3} v''''T + \frac{EA}{R} u'T - \frac{EA}{R} vT - mRvT'' &= -q_n(\alpha)TR, \\ \frac{EA}{R} u''T - \frac{EA}{R} v'T + \frac{EI}{R^3} (u'' + v''')T - mRuT'' &= -q_t(\alpha)TR. \end{aligned}$$

Now deriving from frequency equation  $T'' + \omega^2 T = 0$ , we substitute  $T''$  with  $(-\omega^2 T)$ . After substitution and reduction by  $T$  we will obtain

$$\begin{aligned} v'''' + \frac{EAR^2 - m\omega^2 R^4}{EI} v + u'''' - \frac{EAR^2}{EI} u' &= \frac{R^4}{EI} q_n(\alpha), \\ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) u'' + \frac{m\omega^2 R^4}{EI} u + v'''' - \frac{EAR^2}{EI} v' &= -\frac{R^4}{EI} q_t(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Assuming  $\varepsilon = 0$ , that is, neglecting the tensile strain, we have



$$u'(\alpha) = v(\alpha). \tag{7}$$

Taking into account (7), we differentiate on  $\alpha$  the first of equations (6) and add it to the second

$$u^{VI} + 2u^{IV} + \left(1 - \frac{m\omega^2 R^4}{EI}\right)u'' + \frac{m\omega^2 R^4}{EI}u = \frac{R^4}{EI}(q'_n - q_t). \tag{8}$$

As expected, the obtained equation of forced oscillations of the arch in its plane (8) differs from the analogous equation for free oscillations only in the presence of the right-hand side. This means that, as with free oscillations, 10 solutions are possible here, and the 360 fundamental functions obtained by us earlier for these solutions remain unchanged.

In accordance with the algorithm of the CA MGE [21], it is now necessary to form a vector of the right parts - a vector of loads, which, in turn, involves the calculation of the Green's function and its first five derivatives.

Let us find out what fundamental functions are associated with the Green function and its derivatives. For this, we consider one of the solutions to the differential equation of free oscillations [19], in which the corresponding characteristic equation has roots

$$t_1 < 0, \quad t_{2,3} = \alpha \pm i\beta.$$

The general solution is written as

$$u(\alpha) = C_1\Phi_1(\alpha) + C_2\Phi_2(\alpha) + C_3\Phi_3(\alpha) + C_4\Phi_4(\alpha) + C_5\Phi_5(\alpha) + C_6\Phi_6(\alpha).$$

Functions  $\Phi_1 - \Phi_6$  take values

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \cos \sqrt{t_1}\alpha, & \Phi_2 &= \sin \sqrt{t_1}\alpha, & \Phi_3 &= ch\gamma\alpha \sin \delta\alpha, & \Phi_4 &= ch\gamma\alpha \cos \delta\alpha, \\ \Phi_5 &= sh\gamma\alpha \cos \delta\alpha, & \Phi_6 &= sh\gamma\alpha \sin \delta\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

The algorithm for constructing the Green's function is independent of the boundary conditions of the problem.

Let us define the integration constants  $C_k(\xi)$  ( $k=1,2,\dots,6$ ) from linear system of equations at  $\alpha = \xi$ :

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) & y_5(\xi) & y_6(\xi) \\ y'_1(\xi) & y'_2(\xi) & y'_3(\xi) & y'_4(\xi) & y'_5(\xi) & y'_6(\xi) \\ y''_1(\xi) & y''_2(\xi) & y''_3(\xi) & y''_4(\xi) & y''_5(\xi) & y''_6(\xi) \\ y'''_1(\xi) & y'''_2(\xi) & y'''_3(\xi) & y'''_4(\xi) & y'''_5(\xi) & y'''_6(\xi) \\ y^{IV}_1(\xi) & y^{IV}_2(\xi) & y^{IV}_3(\xi) & y^{IV}_4(\xi) & y^{IV}_5(\xi) & y^{IV}_6(\xi) \\ y^V_1(\xi) & y^V_2(\xi) & y^V_3(\xi) & y^V_4(\xi) & y^V_5(\xi) & y^V_6(\xi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/a_0 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

The determinant of system (10) is Vronsky's determinant, which is not equal to zero for  $\alpha \in (0, \phi_{zp})$ , therefore, system (10) has a unique solution.

Let us form partial solution:

$$Y(\alpha, \xi) = C_1(\xi)y_1(\alpha) + C_2(\xi)y_2(\alpha) + C_3(\xi)y_3(\alpha) + C_4(\xi)y_4(\alpha) + C_5(\xi)y_5(\alpha) + C_6(\xi)y_6(\alpha).$$

We write the Green's function in the form

$$G(\alpha, \xi) = Y(\alpha, \xi)H(\alpha - \xi), \tag{11}$$





where  $H(\alpha - \xi)$  – Heaviside function [22].

If we stipulate in advance that the Green inequality  $\alpha > \xi$  always holds, then the Heaviside function in (11) can be omitted.

Provided that the coefficient at the highest degree in the main differential equation is equal to the unity, we obtain the system of linear algebraic equations

$$\begin{cases} y_1 C_1 + y_2 C_2 + y_3 C_3 + y_4 C_4 + y_5 C_5 + y_6 C_6 = 0; \\ y_1' C_1 + y_2' C_2 + y_3' C_3 + y_4' C_4 + y_5' C_5 + y_6' C_6 = 0; \\ y_1'' C_1 + y_2'' C_2 + y_3'' C_3 + y_4'' C_4 + y_5'' C_5 + y_6'' C_6 = 0; \\ y_1''' C_1 + y_2''' C_2 + y_3''' C_3 + y_4''' C_4 + y_5''' C_5 + y_6''' C_6 = 0; \\ y_1^{IV} C_1 + y_2^{IV} C_2 + y_3^{IV} C_3 + y_4^{IV} C_4 + y_5^{IV} C_5 + y_6^{IV} C_6 = 0; \\ y_1^V C_1 + y_2^V C_2 + y_3^V C_3 + y_4^V C_4 + y_5^V C_5 + y_6^V C_6 = 1, \end{cases} \quad (12)$$

where

$$y_1 = \cos \sqrt{t_1} \alpha; \quad y_2 = \sin \sqrt{t_1} \alpha; \quad y_3 = ch \gamma \alpha \sin \delta \alpha; \\ y_4 = ch \gamma \alpha \cos \delta \alpha; \quad y_5 = ch \gamma \alpha \cos \delta \alpha; \quad y_6 = ch \gamma \alpha \sin \delta \alpha.$$

Solving system (12) by the Gauss method ( $\alpha = \xi$ ), we obtain:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\sin \sqrt{t_1} \xi}{a \sqrt{t_1}}; \\ C_2 = \frac{\cos \sqrt{t_1} \xi}{a \sqrt{t_1}}; \\ C_3 = \frac{\gamma(t + \gamma^2 - 3\delta^2) ch \gamma \xi \cos \delta \xi + \delta(t + 3\gamma^2 - \delta^2) sh \gamma \xi \sin \delta \xi}{2\gamma \delta a(\gamma^2 + \delta^2)}; \\ C_4 = \frac{-\gamma(t + \gamma^2 - 3\delta^2) ch \gamma \xi \sin \delta \xi + \delta(t + 3\gamma^2 - \delta^2) sh \gamma \xi \cos \delta \xi}{2\gamma \delta a(\gamma^2 + \delta^2)}; \\ C_5 = \frac{\gamma(t + \gamma^2 - 3\delta^2) sh \gamma \xi \sin \delta \xi - \delta(t + 3\gamma^2 - \delta^2) ch \gamma \xi \cos \delta \xi}{2\gamma \delta a(\gamma^2 + \delta^2)}; \\ C_6 = \frac{-\gamma(t + \gamma^2 - 3\delta^2) sh \gamma \xi \cos \delta \xi - \delta(t + 3\gamma^2 - \delta^2) ch \gamma \xi \sin \delta \xi}{2\gamma \delta a(\gamma^2 + \delta^2)}, \end{cases}$$

where

$$a = t^2 + 2t(\gamma^2 - \delta^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2.$$

Thus, the Green's function after substitution and simple transformations takes the form

$$G(\alpha, \xi) = C_1(\xi) y_1(\alpha) + C_2(\xi) y_2(\alpha) + C_3(\xi) y_3(\alpha) + C_4(\xi) y_4(\alpha) + C_5(\xi) y_5(\alpha) + \\ + C_6(\xi) y_6(\alpha) = \frac{\sin \sqrt{t_1}(\alpha - \xi)}{a \sqrt{t_1}} + \frac{1}{2\gamma \delta a(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma(t + \gamma^2 - 3\delta^2) ch \gamma(\alpha - \xi) \sin \delta(\alpha - \xi) - \\ - \delta(t + 3\gamma^2 - \delta^2) sh \gamma(\alpha - \xi) \cos \delta(\alpha - \xi)]. \quad (13)$$

It is easy to verify that function (13) has all the properties characteristic of the Green function:

- $G(\alpha, \xi) = 0$  at  $\alpha < \xi$ .
- $G(\alpha, \xi)$ , as function of  $\alpha$  at constant  $\xi$  in  $(0, \phi_{ep})$ , with exception of point  $\alpha = \xi$ , satisfies to linear homogenous differential equation.
- $G(\alpha, \xi)$  and its derivatives by  $\alpha$  up to  $n$ -th order inclusive are continuous for  $\alpha \in (0, \phi_{ep})$  excluding point  $\alpha = \xi$ , in which derivatives by  $\alpha$  are continuous only up to  $(n-2)$  order, and  $(n-1)$  derivative has a gap of the first kind with a jump

$$\left. \frac{d^{(n-1)}G(\alpha, \xi)}{d\alpha^{(n-1)}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{d^{(n-1)}G(\alpha, \xi)}{d\alpha^{(n-1)}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{a_0}.$$

- At  $\alpha = \xi$   
 $G(\xi, \xi) = G'(\xi, \xi) = \dots = G^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \quad G^{(n-1)}(\xi, \xi) = \frac{1}{a_0}.$
- $G(\alpha, \xi)$  for equations with permanent coefficients depends only on difference of two variables  $(\alpha - \xi)$

Using the notation (9), the Green's function (13) can be represented as

$$G(\alpha, \xi) = \frac{\Phi_2(\alpha - \xi)}{a\sqrt{t_1}} + \frac{(t + \gamma^2 - 3\delta^2)\Phi_3(\alpha - \xi)}{2\delta a(\gamma^2 - \delta^2)} - \frac{(t + 3\gamma^2 - \delta^2)\Phi_5(\alpha - \xi)}{2\gamma a(\gamma^2 + \delta^2)}. \quad (14)$$

A comparison of (14) with the expressions of fundamental functions obtained earlier [19] shows that

$$G(\alpha, \xi) = -A_{56}(\alpha - \xi). \quad (15)$$

The first five derivatives of the Green's function are expressed as follows:

$$G'(\alpha, \xi) = \frac{\Phi_1(\alpha - \xi)}{a} - \frac{\Phi_4(\alpha - \xi)}{a} + \frac{(t + \gamma^2 - \delta^2)\Phi_6(\alpha - \xi)}{2\gamma\delta a}$$

or

$$G'(\alpha, \xi) = -A_{16}(\alpha - \xi). \quad (16)$$

$$G''(\alpha, \xi) = \frac{\sqrt{t_1}\Phi_2(\alpha - \xi)}{a} + \frac{(t + \gamma^2 + \delta^2)}{2\delta a} + \frac{(t - \gamma^2 - \delta^2)\Phi_5(\alpha - \xi)}{2\gamma a}$$

or

$$G''(\alpha, \xi) = A_{14}(\alpha - \xi). \quad (17)$$

$$G'''(\alpha, \xi) = \frac{t_1\Phi_1(\alpha - \xi)}{a} + \frac{t_1\Phi_4(\alpha - \xi)}{a} + \frac{[t_1(\gamma^2 - \delta^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2]\Phi_6(\alpha - \xi)}{2\gamma\delta a}$$

or

$$G'''(\alpha, \xi) = A_{24}(\alpha - \xi). \quad (18)$$

$$G^{IV}(\alpha, \xi) = \frac{t_1\sqrt{t_1}\Phi_2(\alpha - \xi)}{a} + \frac{[t_1(\gamma^2 - 3\delta^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2]\Phi_3(\alpha - \xi)}{2\delta a} + \frac{[t_1(3\gamma^2 - \delta^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2]\Phi_5(\alpha - \xi)}{2\gamma a}$$

or

$$G^{IV}(\alpha, \xi) = A_{34}(\alpha - \xi). \quad (19)$$

$$G^V(\alpha, \xi) = \frac{t_1^2 \Phi_1(\alpha - \xi)}{a} + \frac{[2t_1(\gamma^2 - \delta^2) + (\gamma^2 + \delta^2)^2] \Phi_4(\alpha - \xi)}{a} +$$

$$+ \frac{[t_1(\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4) + (\gamma^2 - \delta^2)(\gamma^2 + \delta^2)^2] \Phi_6(\alpha - \xi)}{2\gamma\delta a}$$

or

$$G^V(\alpha, \xi) = A_{44}(\alpha - \xi). \quad (20)$$

Let's move on to determining the components of the external load vector

$$\vec{B}^T = |B_{11} \quad B_{21} \quad B_{31} \quad B_{41} \quad B_{51} \quad B_{61}|. \quad (21)$$

$$B_{11} = \int_0^\alpha G(\alpha - \xi) q(\xi) d\xi, \quad (22)$$

where according to (15),

$$G(\alpha - \xi) = -A_{56}(\alpha - \xi).$$

The right side of the differential equation of forced oscillations (8) in the load vector is taken into account in the form

$$q(\xi) = \frac{R^4}{EI} [q'_n(\xi) - q_t(\xi)]. \quad (23)$$

The components of this expression (Fig. 1, 2) are determined by the formulas:

$$q_t(\xi) = \frac{F_x}{R} \delta(\xi - \alpha_{F_x}) + q_x [H(\xi - \alpha_{x_H}) - H(\xi - \alpha_{x_K})]; \quad (24)$$

$$q_n(\xi) = \frac{F_y}{R} \delta'(\xi - \alpha_{F_y}) + \frac{M}{R^2} \delta'(\xi - \alpha_M) + q_y [H(\xi - \alpha_{y_H}) - H(\xi - \alpha_{y_K})]; \quad (25)$$

$$q'_n(\xi) = \frac{F_y}{R} \delta'(\xi - \alpha_{F_y}) + \frac{M}{R^2} \delta''(\xi - \alpha_M) + q_y [\delta(\xi - \alpha_{y_H}) - \delta(\xi - \alpha_{y_K})]. \quad (26)$$

Substituting (24) and (26) into (23), we obtain:

$$B_{11} = -\frac{R^4}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \left\{ \frac{F_y}{R} \delta'(\xi - \alpha_{F_y}) + \frac{M}{R^2} \delta''(\xi - \alpha_M) + q_y [\delta(\xi - \alpha_{y_H}) - \delta(\xi - \alpha_{y_K})] - \right.$$

$$\left. - \delta(\xi - \alpha_{x_K}) - \frac{F_x}{R} \delta(\xi - \alpha_{F_x}) - q_x [H(\xi - \alpha_{x_H}) - H(\xi - \alpha_{x_K})] \right\} d\xi =$$

$$= -\frac{F_y R^3}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \delta'(\xi - \alpha_{F_y}) d\xi - \frac{MR^2}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \delta''(\xi - \alpha_M) d\xi -$$

$$- \frac{q_y R^4}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \delta(\xi - \alpha_{y_H}) d\xi + \frac{q_y R^4}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \delta(\xi - \alpha_{y_K}) d\xi +$$

$$+ \frac{F_x R^3}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) \delta(\xi - \alpha_{F_x}) d\xi + \frac{q_x R^4}{EI} \int_0^\alpha A_{56}(\alpha - \xi) H(\xi - \alpha_{x_H}) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q_x R^4}{EI} \int_0^{\alpha} A_{56}(\alpha - \xi) H(\xi - \alpha_{x_k}) d\xi = -\frac{F_y R^3}{EI} A'_{56}(\alpha - \alpha_{F_y}) + \frac{MR^2}{EI} A''_{56}(\alpha - \alpha_M) - \\
 & -\frac{q_y R^4}{EI} A_{56}(\alpha - \alpha_{y_H}) + \frac{q_y R^4}{EI} A_{56}(\alpha - \alpha_{y_K}) + \frac{F_x R^3}{EI} A_{56}(\alpha - \alpha_{F_x}) + \\
 & + \frac{q_x R^4}{EI} \int_{\alpha_{x_H}}^{\alpha} A_{56}(\alpha - \xi) d\xi - \frac{q_x R^4}{EI} \int_{\alpha_{x_K}}^{\alpha} A_{56}(\alpha - \xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Substituting value  $A_{56}(\alpha - \xi)$  [19] and performing appropriate differentiation and integration taking into account all properties of impulse functions and splines [22, 23], we finally have:

$$\begin{aligned}
 B_{11} = & -\frac{F_y R^3}{EI} \left\{ \frac{\Phi_1(\alpha - \alpha_{F_y})}{a} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_6(\alpha - \alpha_{F_y}) + \delta\Phi_4(\alpha - \alpha_{F_y})] - \right. \\
 & \left. - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_4(\alpha - \alpha_{F_y}) - \delta\Phi_6(\alpha - \alpha_{F_y})] \right\} + \frac{MR^2}{EI} \left\{ -\frac{\sqrt{t_1}\Phi_2(\alpha - \alpha_M)}{a} + \right. \\
 & \left. + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} [(\gamma^2 - \delta^2)\Phi_3(\alpha - \alpha_M) + 2\gamma\delta\Phi_5(\alpha - \alpha_M)] - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} [(\gamma^2 - \right. \\
 & \left. - \delta^2)\Phi_5(\alpha - \alpha_M) - 2\gamma\delta\Phi_3(\alpha - \alpha_M)] \right\} - \frac{q_y R^4}{EI} \left[ \frac{\Phi_2(\alpha - \alpha_{y_H})}{a\sqrt{t_1}} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_3(\alpha - \right. \\
 & \left. - \alpha_{y_H}) - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_5(\alpha - \alpha_{y_H}) \right] + \frac{q_y R^4}{EI} \left[ \frac{\Phi_2(\alpha - \alpha_{y_K})}{a\sqrt{t_1}} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_3(\alpha - \right. \\
 & \left. - \alpha_{y_K}) - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_5(\alpha - \alpha_{y_K}) \right] + \frac{F_x R^3}{EI} \left[ \frac{\Phi_2(\alpha - \alpha_{F_x})}{a\sqrt{t_1}} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_3(\alpha - \right. \\
 & \left. - \alpha_{F_x}) - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} \Phi_5(\alpha - \alpha_{F_x}) \right] + \frac{q_x R^4}{EI} \left\{ -\frac{\Phi_1(\alpha - \alpha_{x_H})}{a} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_6(\alpha - \right. \\
 & \left. - \alpha_{x_H}) + \delta\Phi_4(\alpha - \alpha_{x_H})] - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_4(\alpha - \alpha_{x_H}) - \delta\Phi_6(\alpha - \alpha_{x_H})] \right\} - \\
 & -\frac{q_x R^4}{EI} \left\{ -\frac{\Phi_1(\alpha - \alpha_{x_K})}{a} + \frac{t_1 + \gamma^2 - 3\delta^2}{2a\delta(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_6(\alpha - \alpha_{x_K}) + \delta\Phi_4(\alpha - \alpha_{x_K})] - \right. \\
 & \left. - \frac{t_1 + 3\gamma^2 - \delta^2}{2a\gamma(\gamma^2 + \delta^2)} [\gamma\Phi_4(\alpha - \alpha_{x_K}) - \delta\Phi_6(\alpha - \alpha_{x_K})] \right\}.
 \end{aligned}$$

In a similar way, we calculate the remaining components of the load vector (21), which we do not give here due to the limited volume of the paper.

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

The proposed approach, the essence of which is that before approximation, analytical integration of the differential equation (or equations) is performed, i.e. in one form or another, the transition to integral equations is an alternative to existing numerical methods for solving differential equations. At the same time, not the entire region is subject to discretization, but only its boundary. The inner part of the region is considered as one "element". This leads to a significant decrease in the number of discrete elements, and, consequently, to a decrease in

the order of the resolving system of algebraic equations. The method is distinguished by a unified approach to the problems of statics, dynamics and structural stability. The divergence of these three classes of problems consists only in different systems of fundamental functions. The matrix of fundamental functions is very sparse, which significantly improves the stability of numerical operations and ensures high accuracy of the results of the method.

## 6 CONCLUSIONS

An ordinary sixth-order differential equation is derived with respect to the longitudinal displacement  $u$ , which describes the forced oscillations of a circular arch in its plane; the Green function is constructed, the load vector is formed. Thus, the first, analytical component of the numerical-analytical method of boundary elements has been completed. The numerical implementation of the algorithm and the comparison of the results with the results of finite element analysis determine the direction of our further research.

It should be noted that the cost of computer resources when implementing a program for calculating an arch system using the boundary element method is minimal, since it is necessary to solve a system of only twelve algebraic equations, which is significantly less than when using the finite element method.

The results obtained allow us to perform dynamic calculations for forced vibrations of not only arched building structures, but also elements of shipbuilding, engineering and any other structures, the design diagram of which is arches and arched systems of arbitrary configuration.

## References

1. Brown, F. H. (1934). Lateral Vibration of Ring-Shaped Frames. *Journal of the Franklin Inst.* 218 (1), 41–48.
2. Federhofer, K. (1939-1940). Zur Schwingzahlberechnung des Dünnwandigen Hohlkreisrings. *Ingr-Arch*, 10–11.
3. Morgaevskij, A. B. (1955). O kolebaniyakh krugovoj arki v napravlenii, perpendikulyarnom k ee ploskosti, *Inzhenerny'j sbornik*, tom XXII.
4. Rabinovich, I. M. (1927). Dinamicheskoe vozdejstvie tolpy' na mosty' po danny'm special'ny'kh opytov Otdela inzhenerny'kh issledovanij. *Voprosy' dinamiki mostov*. 13 sbornik Otdela inzhenerny'kh issledovanij; sb. Trudov, 63, 7 – 18.
5. Snitko, N. K. (1953). *Metody' rascheta sooruzhenij na vibracziyu i udar*. M.: Gosizdat, 248.
6. Smirnova, A. F., Aleksandrov, A. V., Lashhenikov, B. Ya. i dr. (1984). *Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij*. M.: Strojizdat, 413.
7. Chidamparam, P., Leissa, A. W. (1993). Vibrations of planar curved beams, rings, and arches. *Appl Mech Rev*, 46 (9), 467–483.
8. Wu, J. S., Lin, F. T., Shaw, H. J. (2013). Free in-plane vibration analysis of a curved beam (arch) with arbitrary various concentrated elements. *Applied Mathematical Modelling*. 37, 7588–7610
9. Lebeck, A. O., Knowlton, J. S. (1985). A finite element for the three-dimensional deformation of a circular ring. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 21, 421–435.
10. Palaninathan, R., Chandrasekharan, P. S. (1985). Curved beam element stiffness matrix formulation. *Comput. Struct*, 21, 663–669.
11. Ryu, H. S., Sin, H. C. (1996). Curved beam elements based on strained fields. *Commun. Numer. Methods Eng*, 12, 767–773.
12. Litewka, P., Rak, J. (1997). An efficient curved beam finite element. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 40, 2629–2652.
13. Litewka, P., Rakowski, J. (1998). The exact thick arch finite element. *Comput. Struct*, 68, 369–379.
14. Karnovskij, I. A. (2011). Vy'nuzhdenny'e kolebaniya arok. *Teoriya arochny'kh konstrukcij* – Springer, N'yu-Jork, 331-350. [doi.org/10.1007/978-1-4614-0469-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0469-9_7)
15. Wang, T. M., Lee, J. M. (1974). Forced vibrations of continuous circular arch frames. *Journal of Sound and Vibration*, 32 (2), 159-173 [doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80161-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80161-6)

16. Chikhladze, E. D., Berestyanskaya, S. Yu., Lisyakov, I. M. (2015). Dinami'chni' rozrakhunki konstrukci'j. Kh.: UkrDUZT, 164.
17. Shakirzyanov, R. A., Shakirzyanov, F. R. (2015). Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij. Uchebnoe posobie. – 2-e pererab. izd. – Kazan': Izd-vo Kazansk. gos. arkhitekt.-stroit. un-ta, 120.
18. Joel, P. Conte, Rodrigo Astroza, Gianmario Benzoni (2017). Conte. Experimental Vibration Analysis for Civil Structures. Technology & Engineering, 918.
19. Dashhenko, A. F., Kolomicz, L. V., Orobej, V. F., Sur'yaninov, N. G. (2010). Chislenno-analiticheskij metod granichny'kh e'lementov. Odessa: VMV, 1, (1), 416; 2 (2), 512.
20. Orobej, V. F., Sur'yaninov, N. G. (2011). Praktikum po resheniyu kraevy'kh zadach mekhaniki. Uchebnoe posobie dlya studentov tekhnicheskikh speczial'nostej. – Odessa: Astroprint, 408.
21. Orobej, V. F., Sur'yaninov, N. G. (2011). Osnovny'e polozheniya chislenno-analiticheskogo varianta MGE'. Trudy' Sankt-Perburgskogo politekhnich. un-ta. Inzhenerno-stroitel'ny'j zhurnal, 4 (22), 33-39.
22. Vladimirov, V. S. (1979). Obobshhenny'e funkczii v matematicheskoj fizike. M. Nauka, 320.
23. Kornejchuk, N. P., Babenko, V. F., Ligun, A. A. (1992). E'kstremal'ny'e svojstva polinomov i splajnov. AN Ukrainy, In-t matematiki. K.: Naukova dumka, 304.

## Литература

1. Brown F. H. Lateral Vibration of Ring-Schaped Frames / F. H. Brown // *Jornal of the Franklin Inst.* – 1934. – Vol. 218 Nr. 1. – P. 41–48.
2. Federhofer K. Zur Schwingzahlberechnung des Dnnwandigen Hjhlenreifens / K. Federhofer // *Ingr-Arch.* – 1939-1940. – P. 10–11.
3. Моргаевский А. Б. О колебаниях круговой арки в направлении, перпендикулярном к ее плоскости / А. Б. Моргаевский // - Инженерный сборник, том XXII, 1955.
4. Рабинович И. М. Динамическое воздействие толпы на мосты по данным специальных опытов Отдела инженерных исследований / И. М. Рабинович // *Вопросы динамики мостов.* 13 сборник Отдела инженерных исследований; сб. трудов – 1927. – Вып. №63. – С. 7 – 18.
5. Снитко Н. К. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар / Н. К. Снитко // . – М.: Госиздат, 1953. – 248 с.
6. Смирнова А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников и др. // – М.: Стройиздат. 1984. – 413 с.
7. Chidamparam P. Vibrations of planar curved beams, rings, and arches / P. Chidamparam, A. W. Leissa // *Appl Mech Rev* vol 46, no 9, September 1993, P. 467–483.
8. Wu J. S. Free in-plane vibration analysis of a curved beam (arch) with arbitrary various concentrated elements / J. S. Wu, F. T. Lin, H. J. Shaw // *Applied Mathematical Modelling.* – 2013. – V. 37 – P. 7588–7610
9. Lebeck A. O. A finite element for the three-dimensional deformation of a circular ring / A. O. Lebeck, J. S. Knowlton // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 1985. – V. 21. – P. 421–435.
10. Palaninathan R. Curved beam element stiffness matrix formulation / R. Palaninathan, P. S. Chandrasekharan // *Comput. Struct.* – 1985. – V. 21. – P. 663–669.
11. Ryu H. S. Curved beam elements based on strained fields / H. S. Ryu, H. C. Sin // *Commun. Numer. Methods Eng.* – 1996. – V.12. – P. 767–773.
12. Litewka P. An efficient curved beam finite element / P. Litewka, J. Rakowski // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 1997. – V.40. – P. 2629–2652.
13. Litewka P. The exact thick arch finite element / P. Litewka, J. Rakowski // *Comput. Struct.* – 1998. V.68. – P. 369–379.
14. Карновский И. А. Вынужденные колебания арок/ И. А. Карновский // – Теория арочных конструкций – Спрингер, Нью-Йорк, Нью-Йорк – 2011. – С. 331-350.  
[doi.org/10.1007/978-1-4614-0469-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0469-9_7)
15. Wang T. M. Forced vibrations of continuous circular arch frames / T. M. Wang, J. M. Lee // *Journal of Sound and Vibration.* – 1974. – Volume 32, Issue 2, – P. 159-173  
[doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80161-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80161-6)
16. Чихладзе Э. Д. Динамічні розрахунки конструкцій / Э. Д. Чихладзе, С. Ю. Берестянская, I. M. Лисьяков // – X.: УкрДУЗТ, – 2015. – 164 с

17. Шакирзянов Р. А., Шакирзянов Ф. Р. Динамика и устойчивость сооружений / Р. А. Шакирзянов, Ф. Р. Шакирзянов // Учебное пособие. – 2-е перераб. изд. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, – 2015. – 120 с.
18. Joel P. Conte. Experimental Vibration Analysis for Civil Structures / Joel P. Conte, Rodrigo Astroza, Gianmario Benzoni // Technology & Engineering – 2017. – 918 с.
19. Дашченко А. Ф. Численно–аналитический метод граничных элементов / А. Ф. Дашченко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов // – Одесса: ВМВ, 2010. – В 2-х томах. – Т.1. – 416 с. – Т.2. – 512 с.
20. Оробей В. Ф. Практикум по решению краевых задач механики / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов // Учебное пособие для студентов технических специальностей. – Одесса: Астропринт, 2011. – 408 с.
21. Оробей В. Ф. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов // Труды Санкт-Петербургского политехнического ун-та. Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 4 (22). – СПб. – С. 33-39.
22. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров // – М. Наука, – 1979. – 320 с.
23. Корнейчук Н. П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун // АН Украины, Ин-т математики. – 1992. – К.: Наукова думка, – 304 с.

**Balduк Pavlo**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
pavel9balduк@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9055-9005

**Korneeva Irina**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., associate professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
korneevairinaborisovna@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0104-6938

**Neutov Stepan**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., associate professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
neutov.stepan@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0132-124X

*For references:*

Balduк, P., Korneeva, I., Neutov, S. (2020). Forced vibrations of arch systems in its plane, *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (1), 68-80.

*Для посилань:*

Балдук П. Г. Вимушені коливання арокних систем в власній площині / П. Г. Балдук, І. Б. Корнеєва, С. П. Неутов // *Механіка та математичні методи*. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 68-80.



УДК 539.3

## ПРО МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АБСТРАКТНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Полетаєв Г. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** В статті розроблено метод розв'язування та якісного дослідження абстрактних рівнянь з двома невідомими із підкілець факторизаційної пари. Зокрема, доведена ознака, необхідна і достатня умова для існування розв'язку вказаних рівнянь, та того, щоб цей розв'язок був один.

До класу досліджуваних рівнянь відносяться інтегральні рівняння типу Вінера-Хопфа та інші рівняння типу згортки. До таких рівнянь належить і матричні рівняння з трикутними матрицями невідомих та спеціальними проекторами, які допускають застосування в механіці. З точки зору, власне, математики, очевидним є застосування в задачі знаходження пари раціональних функцій з полюсами із півплощини, спорідненій відомій задачі типу Рімана-Гільберта-Привалова теорії аналітичних функцій. Певний рівень загальності з точки зору основ теорії кілець та функціонального аналізу при вивченні деяких класів рівнянь і задач, а також серій постановок задачі розв'язуваності конкретних їх видів приводить до необхідності вивчення, зокрема, абстрактних рівнянь з двома невідомими, в підкілцях факторизаційної пари

В роботі розвиваються і застосовуються методи, що відрізняються алгебраїчністю та опираються на аксіоматику кільця з факторизаційними парами, структурні розклади в них, розв'язки задачі факторизації, а також аналітичні методи, засновані на поєднанні спільних положень теорії кілець, теорії аналітичних функцій та функціонального аналізу. Важливим моментом є факторизація по факторизаційній парі, а суттєвими елементами в реалізаціях – використання ідей, методів і аналітичного апарату банахових алгебр, зокрема, теорії максимальних ідеалів Гельфанда, теорем типу Вінера та Вінера–Леві.

Використовуються основні факти теорії лінійних операторів. Розроблені методи дозволяють ефективну побудову якісної теорії абстрактних рівнянь з двома невідомими, тобто вирішувати питання існування чи не існування розв'язків, а також їх кількості. Для задоволення вимогам доведеної теореми в рівняннях, що досліджуються, в деяких випадках можливе послаблення попередніх умов. З іншого боку, необхідно шукати нові рівняння, що підходять під застосування розроблених методів, в тому числі із прикладним змістом.

**Ключові слова:** абстрактні рівняння, кільця, факторизаційні пари, лінійні оператори, рівняння з двома невідомими.

## ABOUT SOLVING METHOD OF ABSTRACT EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNNS

G. Poletaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** Solving method and qualitative research of abstract equations with two unknowns from the subring of factorization pair are developed in the article. In particular, the evidence is proved, that is necessary and sufficient condition for the existence of the solution of these equations, and therefore this solution is one.

The class of studied equations includes the integral equations of Wiener-Hopf type and other convolutional equations. Such equations include matrix equations with triangular matrices of unknowns and special projectors that are can be used in mechanics. Mathematically, it is obviously to use the theory of analytical functions in the parilogic function problem with the poles from a half-



area, related known problem of Riemann-Hilbert-Privalov type. A certain level of universality from the point of view of the fundamentals of ring theory and functional analysis in the study of certain classes of equations and problems, as well as a series of statements of the problem of looseness of their specific types leads to the need to study, in particular, abstract equations with two unknowns, in a subring of a factorization pair.

The methods are developed and used in the paper that are different in algebraic and base on the axiomatics of the ring with factorization pairs, the structural expansions in them, the solutions of the factorization problem, as well as analytical methods based on a combination of common opinions of ring theory, theory of analytical functions and functional analysis. The key aspect is factorization according to the factorization pair, and the essential elements in the realization are the use of ideas, methods and analytical framework of Banach algebra, in particular, Theory of Maximal Ideals of Gelfand, theorems such as Wiener and Wiener-Levy theorems.

The basic facts of linear operator theory are used. The developed methods allow to form effectively qualitative theory of abstract equations with two unknowns, that means to solve the question of the existence or non-existence of the solutions, as well as their number. To satisfy the requirements of the proven theorem in the equations, in some cases it is possible to weaken the previous conditions. On the other hand, it is necessary to look for new equations that are suitable for using of the developed methods, including those with applied content.

**Keywords:** abstract equations, rings, factorization pairs, linear operators, equations with two unknowns.

## 1 ВСТУП

Виявлення загальних властивостей в елементах теорій різних типів рівнянь, а також різних постановок задач розв'язуваності деяких рівнянь одного виду приводить до необхідності вивчення відповідних рівнянь - моделей в абстрактному кільці з факторизаційною парою [1-5]. Зокрема, це відноситься до інтегральних рівнянь типу Вінера-Хопфа та іншим типам згортки [7]. Належать до таких рівнянь і матричні рівняння з трикутними невідомими і проекторами, що допускають важливі застосування в механіці. Перш за все це відноситься до задачі знаходження пари раціональних функцій з полюсами із півплощин, спорідненої відомої задачі типу Рімана-Гільберта-Привалова теорії аналітичних функцій. Їх розгляд приводить до підтвердження вмотивованості дослідження, наприклад, абстрактних рівнянь з двома невідомими із підкілець довільного асоціативного кільця з факторизаційною парою та низки інших абстрактних рівнянь.

Продовжуючи [1-5], через  $R$  позначимо довільне, взагалі, некомутативне і, можливо, неасоціативне кільце з одиницею  $e$ . Нехай  $p^+, p^-$  - комутуючі проектори, тобто адитивні і ідемпотентні відображення  $R \rightarrow R$ . Покладемо:  $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$ ,  $p_{\mp} = p^{\mp} - p^0$ . Для будь-якої підмножини  $B \subseteq R$  позначимо  $B^{\mp,0} := p^{\mp,0} B$ ;  $B_{\mp} := p_{\mp} B$ ;  $B^* := B^+ + B^-$ ;

$B_* := B_+ + B_-$ . Для будь-якого елемента  $x \in R$  вважаємо  $x^{\mp,0} := p^{\mp,0} x$ ;  $x_{\mp} := p_{\mp} x$ . Зворотний в  $R$  для оборотного в  $R$  елемента  $x \in R$  означатимемо символом  $x'$ , забезпеченим, при необхідності, додатковими. Для довільних підмножин  $A, B \subseteq R$  визначимо множину [2]  $inv(A, B) := \{x \in A : x' \text{ існує і належить } B\}$ . Покладемо

$inv(A, A) := invA$ . Елемент  $u^+$  [- елемент  $v^0$ , елемент  $w^-$ ] назвемо правильним, якщо  $u^+ \in invR^+$  [ $v^0 \in invR^0, w^- \in invR^-$ ].

Пару підкілець  $(R^+, R^-)[\equiv (R^-, R^+)]$  кільця  $R$  з одиницею  $e$  називатимемо його факторизаційною парою (ФП), якщо вона породжена діючими в  $R$  комутуючими проекторами  $p^+, p^- : R^{\mp} = p^{\mp}(R)$  і виконуються наступні аксіоми (пор. [2]):

$$e \in R^0 (= R^{\mp} \cap R^{\mp}); \tag{1}$$

$$p^0 (= p^{\mp} p^{\pm}) \text{ - кільцевий гомоморфізм } R^+ \text{ та } R^- \text{ в } R^0; \tag{2}$$

$$R^+ R^-, R^- R^+ \subseteq R^+ + R^- (= R^*). \tag{3}$$

Всяке кільце  $R$  з одиницею, що розглядається разом з його фіксованою ФП називається кільцем з цією факторизаційною парою.

Будемо говорити ([1, 3], пор.[2]), що елемент  $a \in R$  допускає в  $R$  ліву (праву) факторизацію ( $l.\phi.$ ( $r.\phi.$ )) по парі підкілець  $(R^+, R^-)$ , якщо існують елементи  $r^+ \in R^+$   $s^+ \in R^0, t^- \in R^-$  такі що

$$a = r^+ s^0 t^- (a = t^- s^0 r^+). \tag{4}$$

Множники  $r^+, s^0, t^-$  в (2) називаються плюс -, діагональним - та мінус -факторами, відповідно. Якщо  $(R^+, R^-)[\equiv (R^-, R^+)]$  ФП кільця  $R$  і має місце як ліва, так і права факторизація (4), будемо говорити, що елемент  $a \in R$  допускає в  $R$  двосторонню [4] факторизацію ( $d.\phi.$ ) (4) по факторизаційній парі підкілець  $(R^+, R^-)$ . У разі, коли кільце  $R$  комутативне, ліва, права і двостороння факторизації (4) співпадають. Ліва (права) факторизація (4) називається: правильною лівою (правою) факторизацією

(*n. l.ф. (n. r.ф.)*), якщо  $r^+, s^o, t^-$  правильні елементи; – нормованою лівою (правою) факторизацією (*n.l.ф.(n.r.ф.)*), якщо  $t^0 = r^0 = e$ ; – нормованою правильною лівою (правою) факторизацією (*n.n. l.ф. (n.n. r.ф.)*), якщо вона є *n.l.ф. (n. r.ф.)* та  $t^0 = r^0 = e$ .

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Вивчення інтегральних рівнянь типу згортки, крайових задач, споріднених задач Рімана–Гільберта–Привалова теорії аналітичних функцій, а також задачі факторизації, та інших рівнянь показує, зокрема, що проблемам їх розв'язності та суміжним питанням присвячено численні дослідження. Вони особливі для різних класів просторів і додаткових припущень.

Математичний апарат досліджень рівнянь типу згортки часто пов'язаний з використанням теорії задачі Рімана–Гільберта при додаткових обмеженнях типу гольдеровості функцій, а в роботах М. Г. Крейна та послідовників – положень гармонічного аналізу і теорії операторів. Ці дослідження вимагають подолання значних аналітичних перешкод. Ідейно вони беруть початок з робіт Б. Рімана, Д. Гільберта, І. Племелі, Т. Карлемана, І. Привалова, Н. Вінера, Е. Хопфа, продовжених Ф. Д. Гаховим, І. М. Рапопортом, В. А. Фоком, Ю. І. Черским, М. Г. Крейном, І. Ц. Гохбергом, С. Г. Крейном, А. Г. Костюченко, Ю. М. Березанським, В. С. Королюком, Г. Я. Поповим, Л. П. Нижником, А. Г. Баскаковим, Е. І. Зверовічем, С. М. Мхітаряном, І. А. Фельдманом, І. Б. Симоненко, Н. К. Карапетянцем, С. Г. Самко, Н. Б. Енгібаряном, М. А. Мнацакяном, Л. С. Раковщиком, І. І. Комяком, В. А. Малишевим, і, до теперішнього часу, іншими. Вони мотивуються внутрішнім розвитком математики і потребами застосувань. Відомо, наприклад, що в ряді задач математичної і теоретичної фізики, теорії пружності, астрофізики розвідувальної геофізики, гідродинаміки, гідроаеромеханіки, теоріях атомного ядра, ігор, масового обслуговування, хвилеводів, оптимального прогнозу, фільтрації сигналів та інших виникають інтегральні або інтегро-диференціальні рівняння з ядрами, які залежать від різниці аргументів, або задача Рімана–Гільберта, рівняння Вінера–Хопфа.

Коротка історія таких рівнянь типу згортки, як інтегральне Вінера–Хопфа, парне і відповідне транспоноване, а також задачі Рімана–Гільберта–Привалова є в роботах Ф. Д. Гахова, М. Г. Крейна, І. Ц. Гохберга, В. І. Смагиної, В. І. Смирнова, І. А. Фельдмана, Г. Н. Чеботарьова, Ю. І. Черського та інших. Початок проникненню в ці дослідження ідей бананових алгебр покладено М. Г. Крейном (1958). В роботах М. Г. Крейна і І. Ц. Гохберга (1958, 1964, 1967) та інших авторів підготовлена база істотного внеску А. McNabb'a, А. Schumitzky'ого (1972) в формування поняття факторизації елемента абстрактного кільця, не обов'язково нормованого. При цьому, в теоріях деяких класів рівнянь та задач спостерігаються загальні елементи.

Певний рівень загальності з точки зору основ теорії кілець та функціонального аналізу при вивченні деяких класів рівнянь і задач, а також серій постановок задачі розв'язуваності конкретних їх видів приводить до необхідності вивчення, зокрема, абстрактних рівнянь з двома невідомими, в підкільцях факторизаційної пари.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження має на меті знаходження ознаки того, що абстрактне рівняння з двома невідомими має розв'язок.

Задачі дослідження:

- встановити існування рішень та умови, які забезпечують, щоб розв'язок був один,

- вказати споріднені до відомих типи рівнянь, які допускають застосування отриманих результатів та метод їх розв'язування.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглядається абстрактне рівняння відносно невідомих  $x^+ \in R^+$ ,  $x_- \in R_-$  виду

$$ax^+ + x_- = b, \tag{5}$$

де  $a, b \in R$  відомі елементи. Рівняння (5), що вивчається в кільці  $R$  з ФП можна трактувати як підвид абстрактного дупроєкторного двочленного першого порядку рівняння в кільці з ФП [1, 3]. Це ж рівняння виникає при дослідженні першого рівняння (1)[1].

Рівняння (5) в кільці з ФП можна досліджувати на основі результатів [1,3] чи вказаними в цих роботах методами, безпосередньо. Має місце.

**Теорема.** Нехай  $R = R^*$  - асоціативне, взагалі, некомутативне кільце з одиницею  $e$  і ФП  $(R^+, R^-)$  – коефіцієнт  $a \in R$  має в  $R$  зворотний  $a'$ . Якщо при цьому зворотний елемент  $a'$  допускає в  $R$  нормовану правильну ліву факторизацію (н.п.л.ф.) [1, 3] по ФП  $(R^+, R^-)$ :

$$a' = r^+ s^0 t^-, \tag{6}$$

тоді при будь-якій правій частині  $b \in R$  рівняння (5) має в  $R$  один і тільки один розв'язок  $x^+ \in R^+$ ,  $x_- \in R_-$ . Його можна визначити по формулах:

$$\begin{aligned} x^+ &= r^+ s^0 [t^- b^+]^+; \\ x_- &= t^- [t^- b^+]_-. \end{aligned} \tag{7}$$

Останню з формул (7) можливо перетворити до виду

$$x_- = b_- + t^- [t^- b^+]_-. \tag{8}$$

**Доведення.** Нехай умови теореми виконані і рівняння (5) із заданою правою частиною  $b \in R$  має деякий розв'язок  $(x^+; x_-)$ ,  $x^+ \in R^+$ ,  $x_- \in R_-$ . Тоді, необхідно

$$a = t^- s^0 r^+; \quad ax^+ + x_- = t^- s^0 r^+ x^+ + x_- = b.$$

Звідси витікає, що  $s^0 r^+ x^+ + t^- x_- = t^- b$ . Застосовуючи до останньої рівності проектори  $p^+$ ,  $p_- = p^- - p^0$ , відповідно, встановлюємо:

$$\begin{aligned} p^+[s^0 r^+ x^+] + p^+[t^- x_-] &= p^+[t^- b]; \\ s^0 r^+ x^+ &= p^+[t^- b]; \\ x^+ &= r^+ s^0 p^+[t^- b^+ + t^- b_-] = r^+ s^0 p^+[t^- b^+]; \\ p_-[s^0 r^+ x^+] + p_-[t^- x_-] &= p_-[t^- b]; \\ t^- x_- &= p_-[t^- b]; \\ x_- &= t^- p_-[t^- b]; \\ t^- p_-[t^- b] &= t^- p_-[t^- b_- + t^- b^+] = t^- p_-[t^- b_-] + t^- p_-[t^- b^+] = \end{aligned}$$



$$= t^{-1}t^{-}b_{-} + t^{-1}p_{-}[t^{-}b^{+}] = b_{-} + t^{-1}p_{-}[t^{-}b^{+}];$$

$$x_{-} = b_{-} + t^{-1}p_{-}[t^{-}b^{+}].$$

Таким чином, цей розв'язок  $(x^{+}; x_{-})$ ,  $x^{+} \in R^{+}$ ,  $x_{-} \in R_{-}$  допускає представлення формулами (7) і останню з цих формул можливо перетворити у (8). Незавжди показати, що і, навпаки, встановлену формулу (8) можна перетворити до другої з формул (7)

$$x_{-} = b_{-} + t^{-1}[t^{-}b^{+}]_{-} = b_{-} + t^{-1}[t^{-}\{b - b_{-}\}]_{-} = b_{-} + t^{-1}[t^{-}b]_{-} - t^{-1}[t^{-}b_{-}]_{-} =$$

$$= b_{-} + t^{-1}[t^{-}b]_{-} - t^{-1}t^{-}b_{-} = b_{-} + t^{-1}[t^{-}b]_{-} - b_{-} = t^{-1}[t^{-}b]_{-}.$$

Навпаки. При будь-якій правій частині  $b \in R$  рівняння (5) праві частини формул (7), (8) визначають деякі елементи  $(x^{+}; x_{-})$ ,  $x^{+} \in R^{+}$ ,  $x_{-} \in R_{-}$ . Підстановкою переконаємося, що утворена ними пара елементів  $(x^{+}; x_{-})$  є розв'язком в  $R$  рівняння (5) із заданою правою частиною  $b \in R$ . Насправді, в силу *н.н.л.ф.*  $a' = r^{+}s^{0}t^{-}$ , витікає вид коефіцієнта рівняння (5):

$$a = t^{-1}s^{0'}r^{+'}.$$

Тому,

$$ax^{+} + x_{-} = t^{-1}s^{0'}r^{+'}\{r^{+}s^{0}[t^{-}b^{+}]^{+}\} + b_{-} + t^{-1}[t^{-}b^{+}]_{-} = t^{-1}s^{0'}r^{+'}r^{+}s^{0}[t^{-}b^{+}]^{+} + b_{-} +$$

$$+ t^{-1}\{t^{-}b^{+} - [t^{-}b^{+}]^{+}\} = t^{-1}[t^{-}b^{+}]^{+} + b_{-} + t^{-1}t^{-}b^{+} - t^{-1}[t^{-}b^{+}]^{+} = b_{-} + b^{+} = b.$$

Доведемо, що розв'язок є єдиним. Зрозуміло, це витікає і з першої частини доказу. Для безпосереднього доказу, припустимо, що, окрім визначуваного формулами (7) розв'язку  $(x^{+}; x_{-})$ ,  $x^{+} \in R^{+}$ ,  $x_{-} \in R_{-}$  рівняння (5) із заданою фіксованою правою частиною  $b \in R$ , існує ще один його розв'язок  $(x_{1}^{+}; x_{1-})$ ,  $x_{1}^{+} \in R^{+}$ ,  $x_{1-} \in R_{-}$  в  $R$ .

Тоді, за умов теореми

$$ax^{+} + x_{-} - \{ax_{1}^{+} + x_{1-}\} = a[x^{+} - x_{1}^{+}] + x_{-} - x_{1-} = b - b = 0.$$

Тому

$$t^{-1}s^{0'}r^{+'}[x^{+} - x_{1}^{+}] = x_{1-} - x_{-},$$

$$(R^{+} \supset) s^{0'}r^{+'}[x^{+} - x_{1}^{+}] = t^{-}[x_{1-} - x_{-}] (\in R_{-}).$$

Отже

$$s^{0'}r^{+'}[x^{+} - x_{1}^{+}] = 0; \quad t^{-}[x_{1-} - x_{-}] = 0,$$

$$x^{+} - x_{1}^{+} = 0; \quad x_{1-} - x_{-} = 0; \quad x^{+} = x_{1}^{+}; \quad x_{1-} = x_{-}.$$

Останнє і означає, що рішення в  $R$  єдино. Теорему доведено.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У відповідних кільцях з ФП, можна реалізувати результат: для матричних рівнянь з двома невідомими трикутними матрицями [5]:



$$AX^+ + X_- = B;$$

- для «спорідненої» типу Рімана-Гільберта-Привалова задачі [6-8] з контурною умовою на зімкнутій [7] дійсній осі

$$A(x)X^+(x) + X_-(x) = B(x), \quad (x \in \{-\infty, \infty\});$$

- для інтегрального рівняння типу згортки

$$x(t) - \int_0^\infty k(t-s)x(s)ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

пов'язаного з інтегральним типу Вінера-Хопфа [1, 6, 7].

Метод розв'язку рівняння виду (5) в припущенні виконання умов теореми може бути заснований на проекторному підході в кільці з факторизаційною парою і полягати в наступному:

1. Встановити відповідне конкретне основне кільце з факторизаційною парою, в якому рівняння, що вивчається, допускає запис у формі (5). При цьому невідомі повинні відшукуватися у відповідних підкільцях, що утворюють факторизаційну пару основного кільця.

2. Провести необхідну факторизацію по підкільцях факторизаційної пари і представити зворотний коефіцієнту  $a$  в основному кільці елемент  $a'$  у факторизованому виді (6). Виписати його фактори-множники.

3. По формулах (7), (8), реалізованим в конкретному основному кільці, побудувати шуканий розв'язок.

## 6 ВИСНОВКИ

Розроблені методи дозволяють ефективну побудову якісної теорії абстрактних рівнянь з двома невідомими, тобто вирішувати питання існування чи не існування розв'язків, а також їх кількості. Для задоволення вимогам доведеної теореми в рівняннях, що досліджуються, в деяких випадках можливе послаблення попередніх умов. З іншого боку, необхідно шукати нові рівняння, що підходять під застосування розроблених методів, в тому числі із прикладним змістом.

## Литература

1. Полетаев Г. С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г. С. Полетаев // – К., АН УССР. Ин-т матем.; 88.31. – 1988. – 20с.
2. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of operators–I. Algebraic theory and examples / A. McNabb, A. Schumitzky // Journal of Functional Analysis. –9, №3. –1972, С.262–295.
3. Полетаев Г. С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г. С. Полетаев // - Вісник Харк. Нац. ун-ту. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – №582, вип. 52. – 2003. – С. 143-149.
4. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния/ Л. П. Нижник // – Киев: Наук. думка, 1973. – 182с.
5. Войтик Т. Г., Полетаев Г. С. Уравнения с неизвестными треугольными матрицами, связанные с однопроекторными второго порядка / Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев // Шестнадцатая МНК им. акад. М. Кравчука. Материалы конференции II. Алгебра. Геометрия. Математический анализ. – Киев, 2015. – С. 82-84.
6. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравн. типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский // – М.: Наука, 1978. – 296с.
7. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов / М. Г. Крейн // Успехи мат. Наук. – 1958. – 13, вып. 5(83). – С. 3 – 120.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов // – Москва: ГИФМЛ. – 1963. – 640с.



9. Нижник Л. П. Одномерный оператор Шредингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева / Л. П. Нижник // Функ. анализ и его прил. – 40, №2. – 2006. – С. 74-79.
10. Аров Д. З., Крейн М. Г. Задача об отыскании минимума энтропии в неопределенных проблемах продолжений / Д. З. Аров, М. Г. Крейн // Функ. анализ и его прил. – 15, №2. – 1981. – С. 61-64.

## References

1. Poletaev, G. S. (1988). Ob uravnenijah i sistemah odnogo tipa v kolzah z factoriz. Parami. K., AN USSR. In-t mat. 88.31, 20.
2. McNabb, A., Schumitzky, A. (1972). Factorization of operators–I: Algebraic theory and examples. Journal of Functional Analysis, 9(3), 262–295.
3. Poletaev, G. S. (2003). Nekotorye rezultaty o parnyh uravnenijah v kolzah s faktorizacionnymi parami. Wisnyk Hark. Naz. Un-tu. Serija Matematika, prikladna matematika i mehanika. 582(52), 143-149.
4. Niznik, L. P. (1973). Obratnaja nestazionarnaja zadasha rassejanija. K.: Nauk. Dumka. 182.
5. Voitik, T. G., Poletaev, G. S. (2015). Uravnenija s neizvestnymi treugolnymi matrizami, svjazannye s odnoproektornymi vtorogo porjadka. K. XVI MNK im. ak. M.Kravshuka. Algebra. Geometrija. Matematishesk. Analiz. 82-84.
6. Gahov, F. D., Sherski, Ju. I. (1978). Uravn. tipa svertki. M.: Nauka, 296 c.
7. Krein, M. G. (1958). Integralnye uravnenija na poluprjamoi s jadrom, zavisjaschim ot raznosti argumentov. Uspehi mat. Nauk. 13, 5(83). 3 – 120.
8. Gahov, F. D. (1963). Kraevye zadachi. M.: GIFML. 640.
9. Niznik, L. P. (2006). A One-Dimensional Schrodinger Operator with Point Interactions on Sobolev Spaces. Funk.Anal. Appl., 40(2), 143-147.
10. Arov, D. Z., Krein, M. G. (1981). Problem of search of the minimum of entropy in indeterminate extension problems. Funk.Anal. Appl., 15:2, 61-64.

### **Полетаєв Геннадій Степанович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
poletayev\_gs@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-1989-808X

### *Для посилань:*

Полетаєв Г. С. Про метод розв'язання абстрактних рівнянь з двома невідомими / Г. С. Полетаєв // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 81–88.

### *For references:*

Poletaev, G. (2020). About the method of solving abstract equations with two unknown. mechanics and mathematical methods 2 (1), 81-88.

УДК 519

## ОБЗОР ФУНКЦИЙ WOLFRAM MATHEMATICA, РЕАЛИЗУЮЩИХ СЕГМЕНТАЦИЮ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Гундина М.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Белорусский национальный технический университет*

**Аннотация:** В данной работе рассматриваются возможности сегментации изображений с помощью компьютерной системы *Wolfram Mathematica*. Эта система позволяет осуществить распознавание образов, описать и выделить детали, сделать морфологический анализ изображения. В *Wolfram Mathematica* представлены широкие возможности базовой обработки изображения, бинаризации, фильтрации, сжатия и определения областей интереса. Выделен класс функций, реализующих пороговую обработку. Он позволяет увеличить контрастность снимков, полученных промышленным оборудованием.

В зарубежной и отечественной литературе приводится большой класс алгоритмов обработки цифровых изображений, который может быть применен для решения задач производства, описаны основные направления обработки и анализа изображений, включая основы теории восприятия и регистрации видеoinформации, методы фильтрации, улучшения, восстановления и сжатия черно-белых и цветных изображений.

В работе рассматривается класс функций, реализующий сегментацию изображения. Сегментация делит изображение на его составные части и объекты. Например, при осуществлении автоматического контроля при сборке узлов радиоэлектронной аппаратуры важно уметь выявлять определенные дефекты изготавливаемых приборов, таких как отсутствие компонентов или наличие разрывов контактных дорожек на плате.

Приведенные в статье примеры иллюстрируют два подхода к сегментации изображений, которые основаны на двух базовых свойствах яркости изображения: разрывности и однородности. В примере с нахождением контактных площадок осуществляет разделение изображения на области, однородные в смысле определенных, заранее заданных правил. В примере с профилем изображения сегментация осуществляется исходя из резких перепадов значений яркости, которые происходят на границах объектов.

В системе *Mathematica* представлен широкий набор возможностей для анализа и обработки изображений, используя оптимизированные алгоритмы. Рассмотренные функции позволяют пользователю решать реальные задачи и создавать приложения обработки изображений, в том числе классификацию изображений, выделения признаков, восстановление и многое другое. В работе описываются примеры сегментации изображений, полученных промышленным оборудованием, приводятся стандартные детекторы изображений. Осуществлен обзор функций, предназначенных для первичной обработки изображений; функций, предназначенных для дискретизации изображений; функций, предназначенных для сегментации. Отдельно описаны функции, предназначенные для компонентного анализа.

**Ключові слова:** сегментация, *Mathematica*, детектор, обработка изображения.

## OVERVIEW OF WOLFRAM MATHEMATICA FUNCTIONS IMPLEMENTING IMAGE SEGMENTATION

M. Hundzina<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Belarusian National Technical University*

**Abstract:** This paper discusses the possibilities of image segmentation, using the computer system *Wolfram Mathematica*. This system allows pattern recognition, describe and present details, and morphological image analysis. *Wolfram Mathematica* provides extensive basic image processing, binarization, filtering, compression, and areas of interest. A class of functions that implement

threshold processing is highlighted. It allows us to increase the contrast of images obtained by industrial equipment.

Foreign and domestic literature provides a large class of digital image processing algorithms that can be used to solve production problems, describes the main directions of image processing and analysis, including the basics of the theory of perception and recording of video information, methods of filtering, improving, restoring and compressing black and white and color images.

The paper considers a class of functions that implements image segmentation. Segmentation divides the image into its component parts and objects. For example, when performing automatic control during the assembly of components of electronic equipment, it is important to be able to identify certain defects in the manufactured devices, such as the absence of components or the presence of breaks in the contact tracks on the board.

The examples presented in the paper illustrate two approaches to image segmentation, which are based on two basic properties of image brightness: discontinuity and uniformity. In the example of finding contact pads, the image is divided into areas that are homogeneous in the sense of certain predefined rules. In the example with the image profile, segmentation is carried out on the basis of sharp changes in brightness values that occur at the boundaries of objects.

*Mathematica* provides a wide range of capabilities for analyzing and processing images using optimized algorithms. The functions considered allow the user to solve real problems and create image processing applications, including image classification, feature extraction, recovery, and much more. Examples of segmentation of images obtained by industrial equipment are described, standard image detectors are given. The paper provides an overview of the functions intended for primary image processing; functions for image sampling; functions designed for segmentation. The functions intended for component analysis are described separately.

**Keywords:** segmentation, *Mathematica*, detector, image processing.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Методы обработки изображений применяются в промышленности, физике, механике, медицине. Они применяются при управлении технологическими процессами, автоматизации обнаружения и распознавании объектов различной природы (изображения, получаемые атомно-силовыми и электронными микроскопами, рентгеновскими аппаратами, томографами и т.д.).

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Качественный контроль продукции выполняется автоматическими методами анализа изображения [1]. При обработке изображений решается обширный круг задач, таких как улучшение качества изображений; измерение числовых характеристик; распознавание некоторых частей, сжатие изображений и др.

Современные устройства формирования изображений позволяют решать комплекс технических и научных задач [2–4], требующих синтеза и анализа методов обработки, бинаризации, классификации изображений.

Развитие микроэлектроники позволяет повысить сложность применяемых алгоритмов для решения прикладных задач. В зарубежной и отечественной литературе [5–7] приводится большой класс алгоритмов обработки цифровых изображений, который может быть применен для решения задач производства, приводится набор вопросов сегментации, распознавания образов, описания и представления деталей, морфологического анализа изображения [6–7]. Однако они предназначены для решения научных задач. В то же время, существует необходимость в разработке алгоритмов, которые можно использовать в условиях производства и таких алгоритмов, которые будут интересны и полезны современным инженерам.

## 3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе описывается обзор возможностей системы *Wolfram Mathematica*, позволяющих осуществить сегментацию изображений. Описаны разработанные алгоритмы построения профиля и определения контактных площадок для снимков, полученных промышленным оборудованием.

## 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Примеры сегментации изображений, полученных промышленным оборудованием.** Известно, что сегментация делит изображение на его составные части и объекты. Например, при осуществлении автоматического контроля при сборке узлов аппаратуры важно уметь выявлять определенные дефекты или отсутствие компонентов, наличие разрывов контактных дорожек на плате.

В качестве примера можно привести алгоритм определения контуров контактных площадок полупроводникового кристалла. Реализация разработанного алгоритма в системе *Mathematica* выглядит следующим образом:

```
xmaps=Table[f = ImagePerspectiveTransformation["Маска",  
RotationMatrix[A]];ImageCorrelate[«Адрес изображения»,  
f, CosineDistance], {a,Range[«Диапазон»}]; HighlightImage[«Адрес изображения»,  
Dilation[Fols[ImageAdd,ColorNegate@Binarize[#,  
«Порог»&/@xmaps], BoxMatrix[«Размер маски»]]].
```

Здесь были использованы встроенные функции как:

*Binarize* – функция, позволяющая создать бинарное изображение, которая заменяет все значения пикселей на нули или единицы.

*ColorNegate* – функция, дающее негативное изображения, в котором все цвета противоположные относительно цветов исходного изображения;

*ImageAdd* – функция, позволяющая добавить заданное значение в каждый канал яркости исходного изображения;

*Dilation* – функция, которое осуществляет морфологическую дилатацию изображения по отношению к структурному элементу;

*HighlightImage* – функция, выделяющая специфические области интереса в изображении;

*ImagePerspectiveTransformation* – функция, которая применяет линейное преобразование к каждому пикселю изображения;

*ImageCorralate* – функция, определяющая корреляцию изображения.

На рис. 1 приведен снимок полупроводникового кристалла, выделены цветом контактные площадки, не содержащие видимых дефектов.

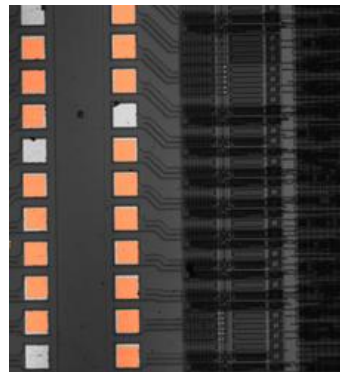


Рис. 1. Обработанный снимок полупроводникового кристалла

Еще одним примером определения контуров объекта является анализ профиля, построенного по изображению.

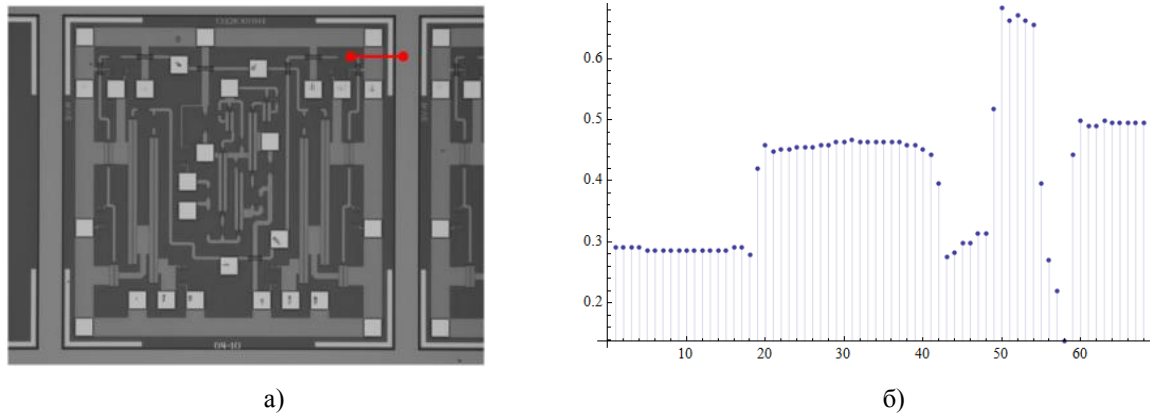
Профиль части изображения позволяет найти области наибольшей яркости, что далее применяется при нахождении контуров изображения в заданном направлении.

Рассмотрим особенности реализации разработанного алгоритма. Создаем блок операций, позволяющий выделять концы отрезка на исходном изображении и тем самым определять путь, вдоль которого будет строиться профиль. В переменной *pt* будем хранить координаты этих точек, в переменной *t* хранится исходное изображение:

```
t1=Block[{pt={}},EventHandler[{LocatorPane[Dynamic[pt]],Dynamic[pt]},  
{“MouseClicked”:->AppendTo[pt,MousePositoin[“Graphics”]}]}].
```

Координаты отрезков, формирующих путь, задаются щелчком левой клавиши мыши на изображении. После этого округляем значения координат, т.к. номера пикселей являются целыми числами:  $s=Round/@pt$ .

На рис. 2 представлено исходное изображение и построенный профиль.



**Рис. 2.** а) исходное изображение с выбранным путем; б) профиль заданной части изображения

Отображаем исходное изображение с помощью следующего набора команд: `Show[t,Graphics[{PointSize[Large],Red,Thick,Point[s],Line[s]}]; Round[lnf[s]]`, где пользовательская функция `lnf` вычисляет длину отрезка.

Создаем цикл по отрезку пути и формируем массив яркости пикселей:

```
list={};For[i=0,i<=IntegerPart[lnf[s], i++,list=AppendTo[list,ImageData[t]
[[IntegerPart[(s[[1,2]+i(s[[2,2]-s[[1,2]])/lnf[s])],
IntegerPart[(s[[1,1]+i(s[[2,1]-s[[1,1]])/lnf[s])]]]]].
```

Данная последовательность действий позволяет интерактивно задать путь, вдоль которого вычисляется профиль. Количество точек профиля определяется исходя из длины пути. Для полутоновых изображений на выходе имеем одномерный массив, в который помещаются значения яркости.

Приведенные примеры иллюстрируют два подхода к сегментации изображений, которые основаны на двух базовых свойствах яркости изображения: разрывности и однородности. В примере с нахождением контактных площадок осуществляет разделение изображения на области, однородные в смысле определенных, заранее заданных правил. В примере с профилем изображения сегментация осуществляется исходя из резких перепадов значений яркости, которые происходят на границах объектов.

**Стандартные детекторы изображений.** Стандартные подходы к обнаружению перепадов яркости. Пусть величина  $R$  задается выражением:

$$R = \sum_{i=1}^9 w_i z_i, \tag{1}$$

где  $z_i$  – это значение яркости пикселя, соответствующего коэффициенту маски  $w_i$ .

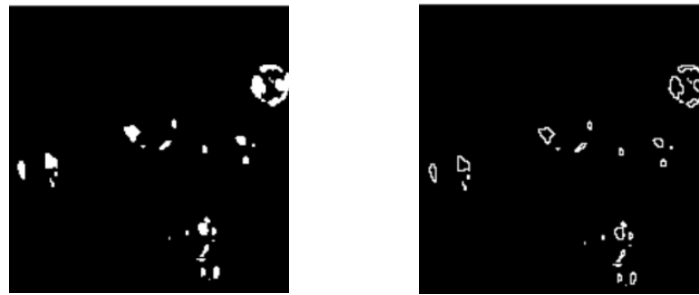
Так, например, для обнаружения точек матрица  $w_i$  представлена на рис. 3.

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

**Рис. 3.** Маска для обнаружения точек

Свертка пикселей изображения с помощью этой маски осуществляется с помощью следующей команды: `{f, ImageConvolve[f,mat1]}` (рис. 4).





**Рис. 4.** Изображение лазерного разрушения и изображение, свернутое маской для обнаружения точек

-1	-1	-1
2	2	2
-1	-1	-1

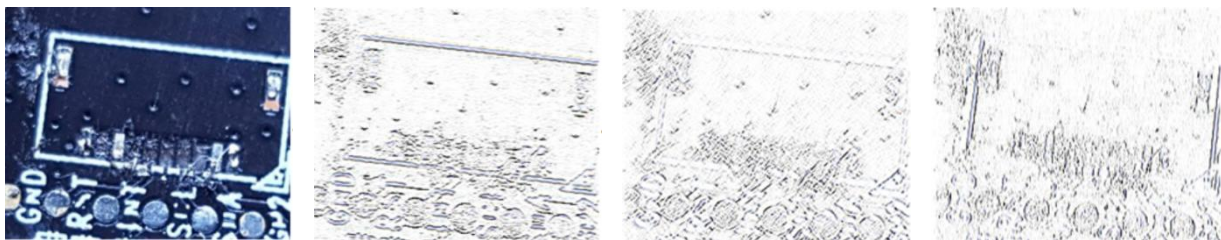
-1	-1	2
-1	2	-1
2	-1	-1

-1	2	-1
-1	2	-1
-1	2	-1

2	-1	-1
-1	2	-1
-1	-1	2

**Рис. 5.** Маска для обнаружения линий

Команда, выводящая на экран исходное изображение, а также модифицированные, выглядит следующим образом (рис. 6): `{f,ImageConvolve[f,maska1]//ColorNegate,ImageConvolve[f,maska2]//ColorNegate,ImageConvolve[f,maska4]//ColorNegate}`.



**Рис. 6.** Обнаружение линий на снимке материнской платы

Одним из наиболее распространенных применений линейной фильтрации в обработке изображений является приближенное представление дискретных производных и, следовательно, обнаружение контуров. Хорошо известные методы Прюитт, Собеля (рис. 7) и Канни, по существу, основанные на вычислении двух ортогональных производных в каждой точке изображения и абсолютной величины градиента.

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

**Рис. 7.** Детектор Собеля

В этом случае величина  $R$  задается выражением

$$R = \left( \sum_{i=1}^9 (w_{1i} z_i)^2 + \sum_{i=1}^9 (w_{2i} z_i)^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $w_{1i}$ ,  $w_{2i}$  – это значения масок, представленных на рис. 7.

Детектор Собеля реализуется следующей командой:

`{t,EdgeDetect[t,Method->"Sobel"]}`



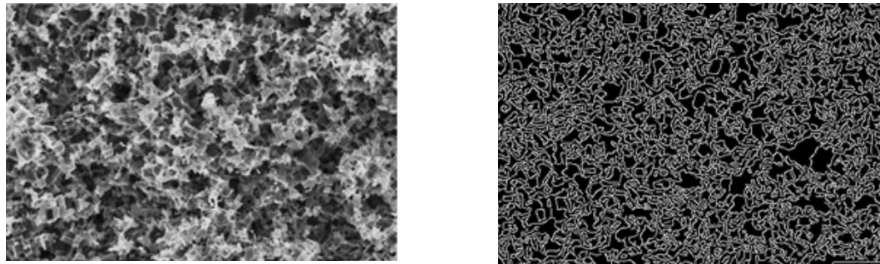


Рис. 8. Результат применения детектора Собела к снимку поверхности металла после обработки

Для изображения с мелкими деталями, такого как рис. 8, различия изображений, полученных детектором Собела и Канни, незначительные.

Добавим пороговое значение, как второй аргумент функции *EdgeDetect*.

Результаты применения описанных детекторов представлены на рис. 9. При обработке установлены одинаковые пороговые значения для полученных изображений.

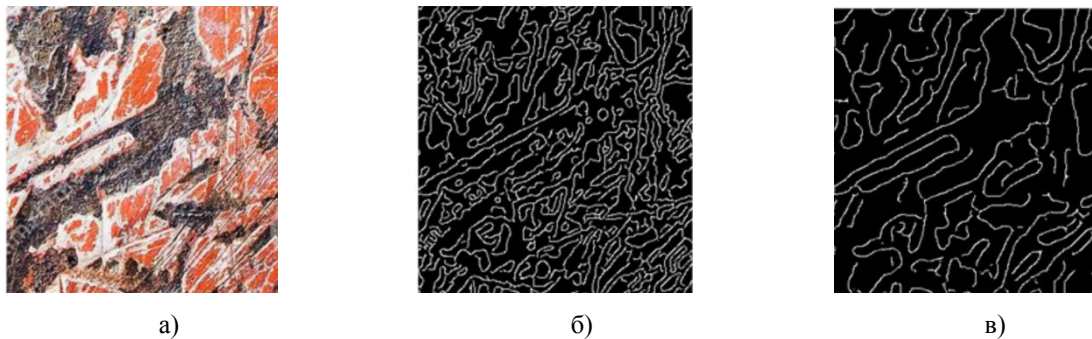


Рис. 9. а) Снимок поцарапанной поверхности металла; б) изображение, обработанное детектором Собела; в) изображение, обработанное детектором Канни

**Обзор функций, предназначенных для первичной обработки изображений.** Предварительная обработка используется при получении информации с прибора и преследует целью снижение уровня помех изображения, возникших в результате дискретизации и квантования, а также подавления внешних шумов. Чаще всего для этого применяются операции усреднения и выравнивания гистограмм.

*ColorQuantize* – функция, реализующая квантование цвета. Квантование понимается как уменьшения количества цветов, используемых для представления изображения. Результат действия команд *ColorQuantize[Image1];ImageHistogram[%Apperance->"Separated"]* представлен на рис. 10.

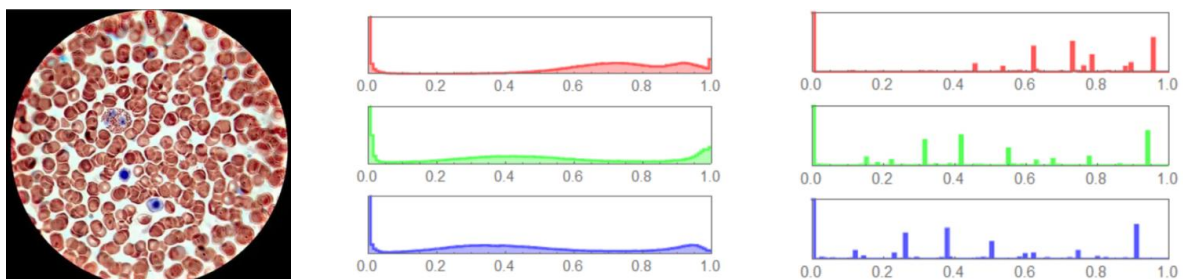


Рис. 10. Снимок крови, полученный с помощью микроскопа, гистограмма изображения до обработки и после квантования

*FillingTransform* – преобразование, которое каждой окрестности пикселей ставит в соответствие наибольшее значение в окрестности, так самым заполняя минимумы, осуществляя преобразование заливки минимумов (рис. 11).

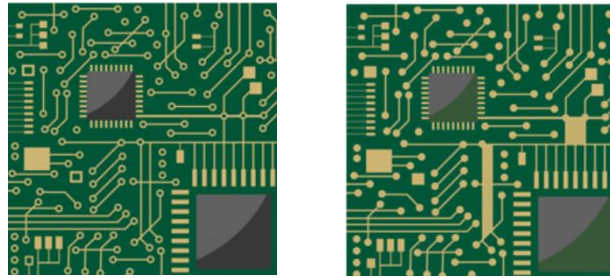


Рис. 11. Снимок части микросхемы

Функция *GradientFilter* дает величину градиента данных, вычисленных с использованием дискретных производных радиуса  $r$  выборки. Эта функция обычно используется для обнаружения областей быстрого изменения сигналов и изображений (рис. 12).

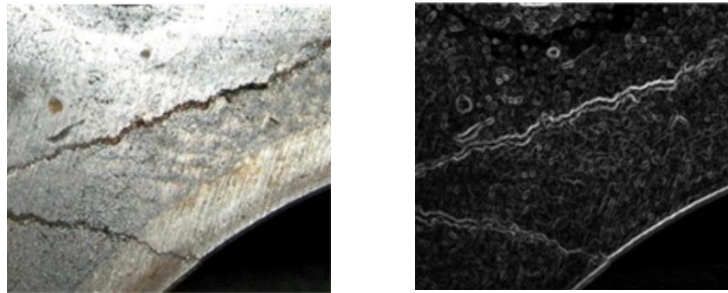


Рис. 12. Снимок трещины в блоке цилиндров, обработанное с помощью градиентного фильтра изображение

*RangeFilter* фильтрует данные, заменяя каждое значение яркости пикселя разностью максимума и минимума значений яркости в его окрестности (рис. 13).

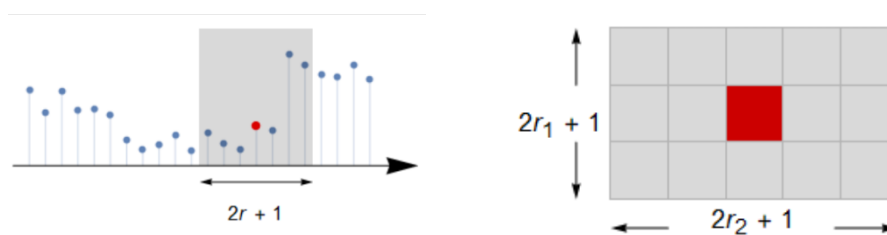


Рис. 13. Окрестность пикселя для одномерного и двумерного случаев

Функция *FindThreshold* находит глобальное пороговое значение, которое разделяет значения интенсивности пикселей изображения на две группы: значения, которые меньше и которые не меньше порогового значения. Тогда, в свою очередь, функция *Threshold* заменяет значения яркостей пикселя в зависимости от порогового значения  $\delta$ . Данная функция может быть записана с двумя аргументами, первым из которых является исходное изображение, вторым аргументом является список  $\{t, \delta\}$ , где спецификатор  $t$  может принимать следующие значения: “*Hard*”, “*Soft*”, “*Firm*”, “*PiecewiseGarrote*”, “*SmoothGarrote*”, “*Hyperbola*” и другие.

Пусть  $x$  – яркость некоторого пикселя полутонового изображения, тогда в результате применения пороговой обработки значение яркости  $X$  этого пикселя будет следующее:

при  $t = \text{“Hard”}$  значение яркости пикселя (рис. 14):

$$X = \begin{cases} 0 & |x| \leq \delta \\ x & |x| > \delta \end{cases}, \quad (3)$$

при  $t = \text{“Soft”}$ :

$$X = \begin{cases} 0 & |x| \leq \delta \\ \text{sgn}(x)(|x| - \delta) & |x| > \delta \end{cases}, \quad (4)$$

при  $t = \text{“Firm”}$ :

$$X = \begin{cases} 0, & |x| \leq \delta - \delta pr \\ \frac{\text{sgn}(x)(\delta + \delta r - \delta pr)(|x| - \delta + \delta pr)}{\delta r}, & \delta - \delta pr < |x| \leq \delta - \delta pr + \delta r \\ x, & |x| > \delta - \delta pr + \delta r \end{cases}, \quad (5)$$

при  $t = \text{“PiecewiseGarrote”}$ :

$$X = \begin{cases} 0 & |x| \leq \delta \\ x - \frac{\delta^2}{x} & |x| > \delta \end{cases}. \quad (6)$$

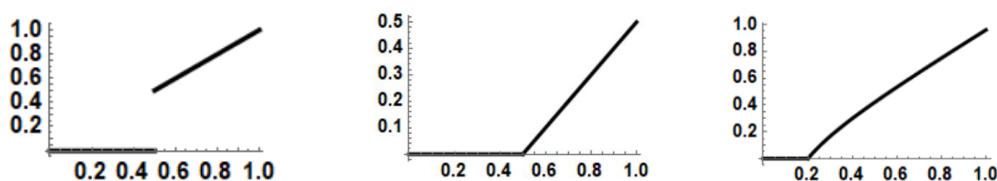


Рис. 14. График функции, соответствующей:

$t = \text{“Hard”}$

$t = \text{“Soft”}$

$t = \text{“PiecewiseGarrote”}$

при  $t = \text{“SmoothGarrote”}$ :

$$X = \frac{x^{2n+1}}{x^{2n} + \delta^{2n}}, \quad (7)$$

при  $t = \text{“Hyperbola”}$ :

$$X = \begin{cases} 0 & |x| \leq \delta \\ \text{sgn}(x)\sqrt{x^2 - \delta^2} & |x| > \delta \end{cases}. \quad (8)$$

Функция *ImageClip* обрезает все значения каналов изображения, обеспечивая нахождение их значений в некотором диапазоне.

**Обзор функций, предназначенных для дискретизации изображений.** Перед пороговой фильтрацией цветные изображения преобразуются в полутоновые изображения. Если пороговое значение не задано, то оптимальное значение вычисляется с помощью одного из нескольких известных подходов.

Одной из разновидностей сегментации изображений является бинаризация. Она представляет собой преобразование цветного изображения в бинарное изображение. В простейшей форме бинаризация, называемая также пороговой фильтрацией, является

поточечной операцией, которая присваивает каждому пикселю изображения значение 0 или 1, основываясь на сравнении с некоторым глобальным пороговым значением  $\delta$ .

Пороговая фильтрация является весьма эффективным предварительным этапом обработки, поскольку здесь происходит значительное сокращение объема хранимых данных, к тому же, результирующие бинарные изображения куда проще анализировать. Бинарные изображения позволяют использовать мощные морфологические операторы для анализа формы изображения и структурного анализа его содержимого. В системе *Mathematica* для создания бинарного изображения используется функция *Binarize*.

Функция *MorphologicalBinarize* создает бинарное изображение, заменяя в исходном изображении все значения яркости выше верхнего порога на значение 1, автоматически выбирая подходящее значение для нижнего порога. Такая функция работает как с 2D, так и с 3D изображениями. Она преобразует многоканальные и цветные изображения в полутоновые изображения, затем создает изображение, в котором каждый пиксель имеет значение 0 или 1. Результат выполнения команды `{Image1, MorphologicalBinarize [Image1, {0.55, 0.8}]}` представлен на рис. 15.



Рис. 15. Снимок поверхности телефона, обработанный снимок с помощью морфологической бинаризации

В свою очередь, локальная адаптивная бинаризация определяет пороги бинаризации локально и обычно используется для сегментирования переднего плана изображения с неоднородным освещением или фоном. Для реализации такого типа бинаризации используется функция *LocalAdaptiveBinarize*. Она создает бинарное изображение, заменяя значения пикселей исходного изображения выше среднего на 1 для окрестности заданного размера, а остальные значения заменяет на 0.

Для создания бинарного изображения, которое будет включать в себя пиксели переднего плана и связанные с ним области, находящиеся от него на определенном расстоянии, используется функция *RegionBinarize* (рис. 16), которая используется для бинарной сегментации.

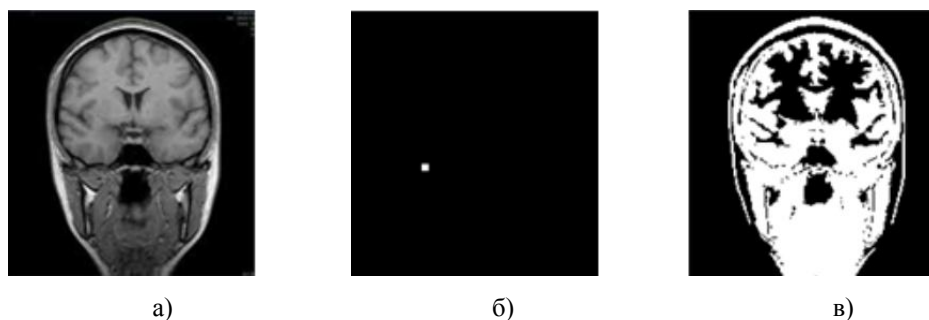


Рис. 16. а) исходный снимок; б) область интереса; в) результат применения функции *RegionBinarize*

Функция *ChanVeseBinarize* реализует итеративный метод активного контура для достижения двухуровневой сегментации изображения. В этом случае под активным



конкурсом понимается изменяемый контур, который состоит из набора точек в двумерном пространстве  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , где  $v_i = \{x_i, y_i\}$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$  [8].

Каждая точка такого контура итеративно подходит к границе объекта, решая задачу минимизации критерия. Для каждой точки, близкой к вершине  $v_i$  считается значение величины  $E_i$  по следующей формуле:

$$E_i = aE_{int}(v_i) + bE_{ext}(v_i), \quad (9)$$

где  $E_{int}(v_i)$  – энергетическая составляющая, зависящая от формы контура,  $E_{ext}(v_i)$  – энергетическая составляющая от свойств изображения, таких как градиент, числа  $a$  и  $b$  – это весовые коэффициенты, обеспечивающие вклад каждой из энергий в общее уравнение критерия.

Функция *ChanVeseBinarize* находит двухуровневую сегментацию изображения путем вычисления оптимальных контуров вокруг областей постоянной интенсивности в изображении.

Следует отметить, что каждый из этих алгоритмов качественно решает задачу только для определённого класса изображений, поэтому автоматизированный анализ нового класса изображений диктует необходимость разработки новых и модернизации существующих алгоритмов сегментации.

**Обзор функций, предназначенных для сегментации.** Для нахождения идентичных компонентов на изображении используется функция *ArrayComponents*. Данная функция возвращает матрицу меток, в которой идентичные элементы представлены последовательными неотрицательными целыми числами.

Функция *MorphologicalComponents* позволяет найти морфологически связанные компоненты. Она возвращает массив, в котором каждый пиксель изображения заменяется целочисленным индексом, представляющим связанный компонент переднего плана, в котором располагается пиксель. Пример действия этой функции на матрицу представлены на рис. 17.

8	0	1	2
0	0	3	4
5	0	0	0
6	7	0	0

1	0	2	2
0	0	2	2
3	0	0	0
3	3	0	0

Рис. 17. Исходный массив, результат применения функции *MorphologicalComponents*

Для обработки изображений широко используется кластеризация. Кластерный анализ предполагает разбиение заданной выборки объектов на подмножества, называемые кластерами, так, чтобы каждый кластер состоял из схожих объектов, а объекты разных кластеров существенно отличались. Кластерный анализ – это многомерная статистическая процедура, выполняющая сбор данных, содержащих информацию о выборке объектов, и затем упорядочивающая объекты в сравнительно однородные группы. Кластер – группа элементов, характеризуемых общим свойством, главная цель кластерного анализа — нахождение групп схожих объектов в выборке. Исходными значениями в простейшем способе для кластеризации являются координаты пикселя  $(x, y)$ , в более сложных случаях, например для полутоновых изображений, используется трехмерный вектор  $(x, y, I(x, y))$ , где  $I(x, y)$  – градации серого и пятимерный вектор  $(RGB)$ . Функция *ClusteringComponents* позволяет реализовать сегментацию на основе кластерного анализа. В результате выполнения функции выдается массив значений, в котором каждый элемент заменяется целочисленным индексом, представляющим кластер, в котором находится элемент.

Еще одним из наиболее распространённых алгоритмов сегментации в области обработки медицинских [9, 10] и материаловедческих [11] изображений является алгоритм водораздела, основанный на представлении полутонового изображения в виде рельефа, который заполняется водой, где водоразделами будут линии, разделяющие области воды разных бассейнов. Функция *WatershedComponents* позволяет осуществить преобразование водораздела изображения, возвращая результат в виде массива, в котором положительные целые числа обозначают водосборные бассейны. Данную функцию можно применять для обработки бинарных, полутоновых и многоканальных изображений.

Одним из наиболее перспективных подходов обработки изображений является подход, реализующий концепцию клеточных автоматов [12]. Эта концепция с учетом дальнейшего развития нейронных клеточных автоматов, придает алгоритму обработки элементы искусственного интеллекта и позволит в будущем повысить надежность распознавания. При использовании клеточного автомата для обработки изображений устанавливается взаимнооднозначное соответствие между пикселями изображения и процессорными элементами клеточного автомата. Функционирование клеточного автомата включает три шага: определение состояния соседей и внутреннего состояния, использование этой информации как входной к внутреннему набору правил и выполнение некоторого действия. В системе *Mathematica* для сегментации изображения с использованием эволюции клеточных автоматов применяется функция *GrowCutComponents*. Она преобразует изображение с помощью клеточных автоматов, где эволюция автоматов приводит к сегментации изображения.

Функция *RemoveBackground* позволяет найти передний план изображения, возвращает изображение, фон которого прозрачен (рис. 18).

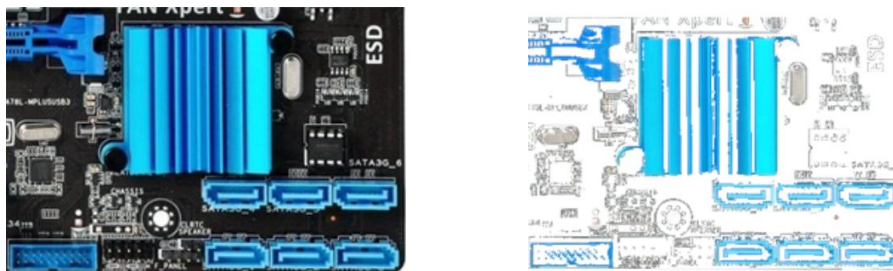


Рис. 18. Исходное изображение, результат применения функции *RemoveBackground*

Спецификация модели используется для указания переднего плана, который сохраняется на изображении, или фона, который удален с изображения.

**Функции, предназначенные для компонентного анализа.** Выбор компонентов используется для фильтрации нежелательных частей изображения, в том числе небольших, больших, соприкасающихся с границами или компонентов определенной формы. В системе *Mathematica* можно использовать функцию *ComponentMeasurements* для вычисления различных свойств компонентов изображения. Она вычисляет заданное свойство для компонентов изображения, обозначенных некоторой матрицей меток. Матрица меток здесь понимается как массив неотрицательных целых чисел, в котором каждое целое число представляет компонент, а значение 0 соответствует фону. Функция *SelectComponents* может быть использована для выбора компонентов изображения с конкретными желаемыми характеристиками. Выбор может выполняться по расположению компонентов, формам и свойствам интенсивности. Данная функция выбирает компоненты изображения, обозначенные матрицей меток, которые удовлетворяют некоторому критерию, оставшиеся значения яркости заменяются на значение 0. Функция *DeleteSmallComponents* заменяет небольшие связанные компонент

в бинарном изображении фоновыми пикселями. Функция *DeleteBorderComponents* заменяет связанные компоненты, соприкасающиеся с границей, в бинарном изображении с фоновыми пикселями. Функция *Colorize* позволяет покрасить каждый сегмент изображения в определенный цвет. Функция *HighlightImage* выделить область интереса.

## 5 ВЫВОДЫ

В системе *Mathematica* представлен широкий набор возможностей для анализа и обработки изображений, используя оптимизированные алгоритмы. Рассмотренные функции позволяют пользователю решать реальные задачи и создавать приложения обработки изображений, в том числе классификацию изображений, выделения признаков, восстановление и многое другое.

## Література

1. Blanchet G. Digital signal and image processing using Matlab / G. Blanchet, M. Charbit. // – London: ScienceEurope, 2001. – 764 p.
2. Breton V. The Healthgrid White Paper / V. Berton // Studies in Health Technology and Informatics. – 2005. – V. 112. – P. 249–318.
3. Мирошников М. М. Теоретические основы оптико-электронных приборов / М. М. Мирошников // – СПб.: «Лань», 2010. – 704с.
4. Gonzalez R. C. Digital Image Processing / R. C. Gonzalez, R. E. Woods // New Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002. – 797p.
5. Bribiesca E. A chain code for representing 3-D curves / E. Bribiesca // Pattern Recog. – 2000. – V. 33, no. 5. – P. 755–765.
6. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс // М.: Техносфера, 2006. – 616с.
7. Рудаков П. И. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x / П. И. Рудаков, И. В. Сафонов // М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416с.
8. Петров В. О. Модификация алгоритма активных контуров для решения задачи интерактивной сегментации растровых изображений дефектов металлических отливок / В. О. Петров, О. О. Привалов // Современные проблемы науки и образования. – 2008. – №6. – С. 14–19.
9. Pham D. L. Current Methods in Medical Image Segmentation / D. L. Pham, C. Xu, J. L. Prince // Annual Review of Biomedical Engineering. – 2000. – V. 2, no. 1. – P. 315–337.
10. Sadykov S. S. Computer diagnosis of tumors in mammograms / S. S. Sadykov, Y. A. Bulanova, E. A. Zakharova // Computer Optics. – 2014. – V. 38, no. 1. – P. 131–138.
11. Waggoner J. 3D Materials Image Segmentation by 2D Propagation: A Graph-Cut Approach Considering Homomorphism / J. Waggoner, Y. Zhou, J. Simmons, M. D. Graef, S. Wang // IEEE Transactions on Image Processing. – 2013. – V. 22, no. 12. – P. 5282–5293.
12. Большаков А. А. Использование клеточных автоматов для обработки изображений минных полей / А. А. Большаков, Н. С. Булдаков // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2010. – Т. 4, № 2. – С. 120–124.

## References

1. Blanchet, G., Charbit, M. (2001). Digital signal and image processing using Matlab. London: ScienceEurope, 764.
2. Breton, V. (2005). The Healthgrid White Paper. Studies in Health Technology and Informatics, 112, 249–318.



3. Miroshnikov, M. M. (2010). Teoreticheskie osnovy optiko-elektronnyh priborov. SPb.: Lan', 704.
4. Gonzalez, R. C., Woods, R. E. (2002). Digital Image Processing. New Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River, 797.
5. Bribiesca, E. (2000). A chain code for representing 3-D curves. Pattern Recog, 33 (5), 755–765.
6. Gonsales, R., Vuds, R., Eddins, S. (2006). Cifrovaya obrabotka izobrazhenij v srede MATLAB. M.: Tekhnosfera, 616.
7. Rudakov, P. I., Safonov I. V. (2000). Obrabotka signalov i izobrazhenij. MATLAB 5.h. M.: DIALOG-MIFI, 416.
8. Petrov, V. O., Privalov, O. O. (2008). Modifikaciya algoritma aktivnyh konturov dlya resheniya zadachi interaktivnoj segmentacii rastrovnyh izobrazhenij defektov metallicheskih otливok. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya, 6, 14–19.
9. Pham, D. L., Xu, C., Prince, J. L. (2000). Current Methods in Medical Image Segmentation. Annual Review of Biomedical Engineering, 2 (1), 315–337.
10. Sadykov, S. S., Bulanova, Y. A., Zakharova, E. A. (2014). Computer diagnosis of tumors in mammograms. Computer Optics, 38 (1), 131–138.
11. Waggoner, J., Zhou Y., Simmons, J., Graef, M. D., Wang, S. (2013). 3D Materials Image Segmentation by 2D Propagation: A Graph-Cut Approach Considering Homomorphism. IEEE Transactions on Image Processing, 22 (12), 5282–5293.
12. Bol'shakov, A. A., Buldakov, N. S. (2010). Ispol'zovanie kletochnyh avtomatov dlya obrabotki izobrazhenij minnyh polej. Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 4, 2, 120–124.

**Гундина Мария Анатольевна**

Белорусский национальный технический университет, к.ф.-м.н., доцент  
пр.Независимости, 65 Минск, Республика Беларусь 220013  
maryanatolevna@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-9385-9919

*Для посилань:*

Гундина М. А. Обзор функций wolfram mathematica, реализующих сегментацию изображений / М. А. Гундина // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 89–102.

*For references:*

Hundzina, M., (2020). Overview of wolfram mathematica functions implementing image segmentation. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (1), 89–102.

Наукове видання

**МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ**  
**MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS**

**Науковий журнал**

*(українською, російською та англійською мовами)*

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 26.06.2020 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 11,97.  
Наклад 50 прим. Зам. №20-44Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@ogasa.org.ua](mailto:rio@ogasa.org.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА