

УДК 539.3:517.938:519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО ЗМІЦНЕННЯ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ

Сясєв А.В.¹

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: У статті запропоновано математичну модель процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, побудовану на основі узагальненого рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розроблення компактних математичних моделей, здатних адекватно описувати еволюцію процесів зміцнення матеріалів за одночасної дії механічних навантажень і температурних впливів та забезпечувати ефективне проведення чисельних досліджень. Метою роботи є побудова математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення на основі узагальненого рівняння Ріккаті, дослідження її якісних властивостей та розроблення алгоритму чисельного розв'язування.

Побудову моделі здійснено шляхом локальної квадратичної апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації, що дозволило отримати неавтономне рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами, які мають безпосередню фізичну інтерпретацію. Проведено якісний аналіз моделі, досліджено вплив її параметрів на характер еволюції функції стану та розроблено алгоритм чисельного інтегрування на основі класичного методу Рунге–Кутти четвертого порядку.

Виконано чисельний експеримент, який підтвердив працездатність запропонованої математичної моделі та узгодженість результатів якісного аналізу з даними чисельного моделювання. Показано, що зміна коефіцієнтів узагальненого рівняння Ріккаті дозволяє описувати різні режими еволюції процесу термомеханічного зміцнення, а найбільший вплив на характер розв'язку має нелінійний коефіцієнт, який визначає інтенсивність нелінійного саморегулювання процесу.

Наукова новизна роботи полягає у побудові узагальненої математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, у якій рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами отримано як наслідок локальної квадратичної апроксимації фізично обґрунтованого балансу між процесами накопичення зміцнення та релаксації. Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі для аналізу впливу технологічних параметрів на процес термомеханічного зміцнення, проведення параметричних досліджень та прогнозування еволюції функції стану під час комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: математичне моделювання, термомеханічне зміцнення, узагальнене рівняння Ріккаті, задача Коші, метод Рунге–Кутти, чисельне моделювання, нелінійні диференціальні рівняння, параметричний аналіз.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMOMECHANICAL HARDENING IN DEFORMABLE SOLIDS BASED ON A GENERALIZED RICCATI EQUATION

A. Siasiev¹

¹*Oles Honchar Dnipro National University*

Abstract: The paper proposes a mathematical model of the thermomechanical hardening process in deformable solids based on a generalized Riccati equation with time-dependent coefficients. The relevance of the study is determined by the need for compact mathematical models capable of adequately describing the evolution of hardening processes under coupled mechanical loading and thermal effects while avoiding the complexity of large-scale multiparameter thermomechanical models. The aim of the study is to develop a mathematical model of thermomechanical hardening based on a generalized Riccati equation, investigate its qualitative properties, and develop an efficient numerical solution algorithm.

The proposed model is derived using a local quadratic approximation of generalized hardening accumulation and relaxation functions, resulting in a non-autonomous Riccati equation whose coefficients possess a clear physical interpretation. A qualitative analysis of the model is performed to investigate the influence of the governing parameters on the evolution of the state function and to determine the conditions leading to stabilization of the hardening process. The initial value problem is solved numerically using the classical fourth-order Runge–Kutta method, which provides high computational accuracy and efficiency for parametric studies.

A series of numerical experiments confirms the applicability of the proposed mathematical model and demonstrates good agreement between the theoretical analysis and numerical simulations. The results show that variations in the coefficients of the generalized Riccati equation make it possible to reproduce different evolution regimes of the thermomechanical hardening process, whereas the nonlinear coefficient has the greatest influence on the solution behavior by controlling the intensity of nonlinear self-regulation.

The scientific novelty of the study consists in deriving a generalized Riccati equation from a physically justified balance between hardening accumulation and relaxation processes using a local quadratic approximation rather than introducing it phenomenologically. The proposed model can be used for parametric analysis, numerical simulation, and prediction of thermomechanical hardening processes under various technological operating conditions.

Keywords: mathematical modeling, thermomechanical hardening, generalized Riccati equation, initial value problem; Runge–Kutta method, numerical simulation, nonlinear differential equations, parametric analysis.

1 ВСТУП

Термомеханічні процеси, що супроводжують пластичне деформування, кристалізацію, наплавлення, термічне зміцнення та інші технологічні операції, характеризуються складною взаємодією температурних і механічних полів. Зміна температури впливає на механічні властивості матеріалу, тоді як процеси деформування, у свою чергу, змінюють тепловий стан тіла. Цей взаємозв'язок формує остаточні напруження, деформації та структуру матеріалу. Усе це безпосередньо впливає на якість і експлуатаційні властивості готових виробів [1–8].

Сучасний розвиток обчислювальної механіки значно розширив можливості дослідження зв'язаних термомеханічних процесів. Разом із тим більшість відомих моделей орієнтована на розв'язування окремих прикладних задач і нерідко базується на значній кількості припущень щодо фізичних властивостей матеріалу, умов навантаження або характеру теплообміну. Через такі обмеження розробка універсальних математичних моделей, які б адекватно описували еволюцію процесів зміцнення в широкому діапазоні технологічних режимів, залишається актуальною науковою задачею [4–8].

Одним із перспективних напрямів розвитку таких моделей є використання нелінійних диференціальних рівнянь. Вони дозволяють природно врахувати, як між собою взаємодіють конкуруючі процеси: накопичення та релаксація структурних змін. Особливий інтерес становить узагальнене рівняння Ріккаті, математична структура якого забезпечує достатню гнучкість для опису широкого класу еволюційних процесів, а також створює передумови для проведення якісного аналізу та ефективного чисельного моделювання.

В останні роки значну увагу приділено розвитку моделей, що враховують взаємодію температурних і механічних факторів у задачах термопружності, термопластичності та чисельного моделювання технологічних процесів [4–8]. Водночас питання побудови компактних нелінійних моделей, придатних для аналізу процесів термомеханічного зміцнення деформованих твердих тіл із використанням узагальненого рівняння Ріккаті, висвітлено недостатньо. Це стосується насамперед вибору узагальненої структури моделі, дослідження її властивостей та створення алгоритмів чисельного розв'язування, придатних для практичного застосування.

Це дослідження є логічним продовженням попередніх робіт автора, присвячених математичному моделюванню процесів кристалізації, формування деталей методами нарощування матеріалу, а також побудові нелінійних аналітичних моделей технологічних процесів [9–12]. На відміну від зазначених досліджень, у цій роботі основну увагу зосереджено на побудові узагальненого рівняння Ріккаті для опису процесів термомеханічного зміцнення, дослідженні його якісних властивостей та перевірці працездатності запропонованого підходу за допомогою чисельного експерименту.

Запропонований підхід поєднує фізично обґрунтовану постановку задачі, побудову узагальненої математичної моделі, її якісний аналіз і чисельну реалізацію. Така послідовність дає змогу не лише описати характер еволюції процесу зміцнення, а й оцінити вплив визначальних параметрів моделі на перебіг досліджуваного процесу, що є важливим як для подальшого розвитку математичних моделей, так і для їх практичного використання під час дослідження сучасних технологій обробки матеріалів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідження процесів термомеханічного деформування та зміцнення деформівних твердих тіл ґрунтуються на класичних положеннях термомеханіки, сформульованих у фундаментальних працях [1–3]. Розроблені в них моделі заклали теоретичну основу опису взаємодії температурних і механічних полів та визначили напрями подальшого розвитку узагальнених теорій термопружності. Попри значний часовий проміжок від моменту їх появи, ці роботи й сьогодні залишаються базовими для побудови математичних моделей зв'язаних термомеханічних процесів.

Подальший розвиток теорії пов'язаний із побудовою модифікованих моделей, які дозволяють враховувати скінченну швидкість поширення теплових збурень, часові затримки теплопереносу, нелокальні ефекти та інші фізичні особливості поведінки матеріалів. Узагальнення класичних моделей стали предметом численних сучасних досліджень, у яких особлива увага приділяється математичній коректності моделей, їх фізичній інтерпретації та можливостям практичного застосування [4–6]. Використання таких моделей істотно розширило можливості дослідження процесів, для яких класичні співвідношення виявляються недостатньо точними.

Паралельно активно розвиваються методи чисельного моделювання складних термомеханічних процесів. Сучасні обчислювальні підходи дозволяють аналізувати напружено-деформований стан тіл складної геометрії, досліджувати вплив неоднорідності матеріалів, локальних дефектів та контактної взаємодії на результати розрахунків [7, 8, 14–17]. Застосування високопродуктивних чисельних методів значно розширило можливості інженерного аналізу, однак у більшості випадків математичні моделі залишаються достатньо громіздкими, містять значну кількість параметрів і орієнтовані на вузькі класи практичних задач.

Окремий напрям досліджень становить математичне моделювання технологічних процесів, у яких термічні та механічні явища тісно взаємодіють між собою. До таких процесів належать кристалізація матеріалів, формування виробів методами нарощування, локальне термічне зміцнення та інші сучасні технології. У роботах авторів [9–12] розроблено математичні моделі окремих технологічних процесів, досліджено взаємний вплив температурних і механічних полів, запропоновано підходи до побудови нелінійних аналітичних моделей та алгоритмів їх чисельної реалізації. Отримані результати підтвердили доцільність використання узагальнених нелінійних співвідношень для опису еволюції процесів, однак кожна із запропонованих моделей була орієнтована на конкретний клас задач.

Аналіз сучасних публікацій показує, що переважна більшість існуючих моделей будується або на основі детальних систем рівнянь термомеханіки, які потребують значних обчислювальних ресурсів, або на спрощених емпіричних залежностях, область застосування яких є обмеженою [4–8, 13–17]. Унаслідок цього виникає потреба у побудові математичної моделі, яка, з одного боку, зберігала б фізичний зміст досліджуваних процесів, а з іншого – була б достатньо компактною для проведення якісного аналізу, чисельного моделювання та дослідження впливу основних параметрів.

Ефективним засобом для подолання вказаних труднощів є математичний інструментарій узагальненого рівняння Ріккати, покладений в основу опису еволюційних термомеханічних процесів. Його нелінійність забезпечує адекватне відтворення взаємопов'язаних явищ накопичення та релаксації напружень, гарантує універсальність розрахунків і відкриває можливості для застосування новітніх методів чисельного аналізу.

Таким чином, аналіз літературних джерел свідчить, що, незважаючи на значний розвиток теорії термомеханіки та чисельного моделювання зв'язаних процесів, задача

побудови узагальненої математичної моделі термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, основаної на рівнянні Ріккати зі змінними коефіцієнтами, залишається актуальною. Саме розв'язанню цієї проблеми присвячено подане дослідження.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розроблення математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами, дослідження її якісних властивостей та розроблення алгоритму чисельного розв'язування для аналізу еволюції процесу за різних режимів навантаження.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- сформулювати фізичну постановку задачі та визначити основні фактори, що характеризують процес термомеханічного зміцнення;
- побудувати математичну модель досліджуваного процесу з урахуванням взаємодії температурних і механічних полів;
- отримати узагальнене рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами, яке описує еволюцію процесу зміцнення;
- провести якісний аналіз запропонованої моделі та встановити вплив її параметрів на характер розв'язків;
- розробити алгоритм чисельного розв'язування побудованої задачі та дослідити його обчислювальні властивості;
- виконати серію чисельних експериментів, проаналізувати отримані результати та оцінити можливості практичного застосування запропонованої моделі.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Фізична постановка задачі

Процес термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл є результатом одночасної дії температурних і механічних факторів, що взаємно впливають один на одного протягом усього технологічного циклу. Під час локального нагрівання, охолодження або пластичного деформування в матеріалі відбуваються структурні зміни, які супроводжуються накопиченням внутрішніх напружень, перерозподілом енергії та зміною фізико-механічних властивостей. При цьому інтенсивність цих процесів залежить не лише від температури чи рівня навантаження окремо, а й від їх спільної дії протягом усього технологічного циклу.

Розглядатимемо однорідне деформівне тверде тіло, для якого процес зміцнення описується узагальненою характеристикою стану. Такий підхід не пов'язує модель з конкретною технологією та дозволяє використовувати її для аналізу широкого класу процесів, серед яких локальне термічне зміцнення, поверхнева обробка, кристалізація, адитивне формування виробів та інші технології, у яких визначальну роль відіграє взаємодія температурного і механічного полів.

Для побудови математичної моделі приймаються такі припущення:

- матеріал розглядається як суцільне деформівне середовище;
- температурне та механічне поля змінюються неперервно в часі;
- зовнішнє навантаження і температурний режим можуть бути довільними функціями часу;
- процес зміцнення супроводжується одночасною дією механізмів накопичення структурних змін та їх релаксації;
- локальні фізичні процеси можуть бути описані інтегральною характеристикою стану матеріалу.

Останнє припущення є принциповим для подальшої побудови моделі. Замість опису окремих фізичних величин розглядатимемо узагальнену функцію $y(t)$, яка характеризує поточний рівень термомеханічного зміцнення матеріалу. Величина $y(t)$ не ототожнюється з конкретною експериментально вимірюваною характеристикою. Вона є інтегральним параметром, що відображає сукупний вплив температурних, силових та структурних факторів на стан матеріалу.

На відміну від традиційних моделей, у яких основна увага приділяється безпосередньому опису температурних або механічних полів, запропонований підхід базується на дослідженні еволюції функції стану $y(t)$. Це дозволяє перейти від аналізу окремих фізичних процесів до побудови узагальненої моделі, придатної для різних технологічних режимів.

З фізичної точки зору зміна функції $y(t)$ визначається взаємодією двох протилежно спрямованих процесів. Перший пов'язаний із накопиченням структурних змін, що приводять до підвищення рівня зміцнення матеріалу. Другий характеризує процеси релаксації, які зменшують досягнутий рівень зміцнення внаслідок теплового впливу, структурної перебудови або зміни режиму навантаження.

Саме взаємодія та протистояння цих процесів визначає характер еволюції стану матеріалу. Тому побудова математичної моделі повинна ґрунтуватися не на емпіричному виборі конкретного диференціального рівняння, а на формалізації фізичного балансу між швидкостями накопичення зміцнення та його релаксації. Такий підхід дозволяє отримати математичну модель як наслідок фізичної постановки задачі, а не як початкове припущення.

Математична постановка задачі

Для опису технологічного процесу введемо вектор керувальних параметрів $\mathbf{u}(t) = (T(t), \sigma(t), \dot{\epsilon}(t), q(t), \dots)$, $T(t)$ – температура, $\sigma(t)$ – еквівалентне механічне напруження, $\dot{\epsilon}(t)$ – швидкість пластичного деформування, $q(t)$ – інтенсивність зовнішнього теплового впливу, а інші компоненти можуть характеризувати особливості конкретного технологічного процесу.

Відповідно до фізичної постановки задачі швидкість зміни функції стану визначається різницею між швидкістю накопичення зміцнення та швидкістю його релаксації. Тому еволюцію процесу доцільно описати балансним співвідношенням

$$\frac{dy}{dt} = P(y, \mathbf{u}(t), t) - R(y, \mathbf{u}(t), t), \quad (1)$$

де функція $P(y, \mathbf{u}(t), t)$ характеризує інтенсивність процесів накопичення зміцнення, а функція $R(y, \mathbf{u}(t), t)$ – інтенсивність релаксаційних процесів.

Для компактності подальших записів введемо узагальнену функцію швидкості еволюції

$$G(y, \mathbf{u}(t), t) = P(y, \mathbf{u}(t), t) - R(y, \mathbf{u}(t), t). \quad (2)$$

Тоді рівняння (1) можна записати у більш компактному вигляді

$$\frac{dy}{dt} = G(y, \mathbf{u}(t), t). \quad (3)$$

Співвідношення (3) визначає загальну структуру математичної моделі, однак ще не задає конкретного вигляду функції G . Подальша побудова полягає у встановленні її

функціональної залежності на основі фізичних закономірностей процесу термомеханічного зміцнення. Саме цей етап приводить до отримання узагальненого рівняння Ріккати, яке є математичним ядром запропонованої моделі.

Отже, математична постановка задачі полягає у побудові такої функції $G(y, u(t), t)$, яка адекватно описує фізичні закономірності процесу термомеханічного зміцнення, забезпечує коректність математичної моделі та дозволяє дослідити вплив керувальних параметрів на еволюцію стану матеріалу. Наступним кроком є конкретизація цієї функції та виведення узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами.

Побудова узагальненого рівняння Ріккати

Відповідно до співвідношення (2), подальша побудова математичної моделі зводиться до визначення аналітичної структури узагальненої функції швидкості еволюції $G(y, u(t), t)$. Оскільки функція G формується як різниця між швидкостями накопичення зміцнення та релаксації, її математичний опис повинен відображати фізичну природу обох процесів і водночас бути придатним для подальшого аналітичного та чисельного дослідження.

У загальному випадку функції $P(y, u(t), t)$ і $R(y, u(t), t)$, що входять до співвідношення (2), є нелінійними функціями стану матеріалу. Їх точний аналітичний вигляд визначається фізико-механічними властивостями середовища, температурним режимом, історією навантаження та іншими чинниками технологічного процесу. Тому замість введення емпіричного закону використаємо локальну апроксимацію цих функцій у деякому околі робочого стану.

Нехай y_* відповідає вибраному робочому стану матеріалу. Для подальшого аналізу введемо відхилення

$$z(t) = y(t) - y_*. \quad (4)$$

Використовуючи співвідношення (4), розкладемо функції накопичення зміцнення та релаксації в ряд Тейлора за степенями z . Припустимо, що обидві функції двічі неперервно диференційовні за змінною стану. Оскільки метою є побудова найпростішої нелінійної моделі, здатної відобразити основні закономірності взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації, обмежимося членами другого порядку. Такий вибір є компромісом між фізичною адекватністю опису процесу та математичною простотою моделі, а використання апроксимацій вищих порядків у межах поставленої задачі призводить б до істотного ускладнення математичного опису без принципового розширення його аналітичних можливостей.

Тоді функція накопичення зміцнення має вигляд

$$P(y, u(t), t) = P_0(t) + P_1(t)z + P_2(t)z^2 + O(z^3), \quad (5)$$

де

$$P_0(t) = P(y_*, u(t), t), \quad P_1(t) = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=y_*}, \quad P_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \Big|_{y=y_*}.$$

Аналогічно для функції релаксації отримуємо

$$R(y, u(t), t) = R_0(t) + R_1(t)z + R_2(t)z^2 + O(z^3), \quad (6)$$

де

$$R_0(t) = R(y_*, u(t), t), \quad R_1(t) = \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{y=y_*}, \quad R_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \Big|_{y=y_*}.$$

Підставляючи апроксимації (5) і (6) у балансне рівняння (1), одержуємо

$$\frac{dz}{dt} = (P_2 - R_2)z^2 + (P_1 - R_1)z + (P_0 - R_0) + O(z^3). \quad (7)$$

Співвідношення (7) показує, що локальна еволюція функції стану визначається квадратичною залежністю від відхилення z , тоді як член $O(z^3)$ характеризує похибку апроксимації. Оскільки залишковий член є величиною третього порядку малості, його внесок у достатньо малому околі робочого стану значно менший за внесок квадратичних членів. Тому, зберігаючи основні фізичні закономірності процесу, у подальшому ним можна знехтувати.

Після відкидання залишкового члена $O(z^3)$ із співвідношення (7) отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = (P_2 - R_2)z^2 + (P_1 - R_1)z + (P_0 - R_0). \quad (8)$$

Рівняння (8) є локальною квадратичною моделлю еволюції процесу, що є найпростішим нелінійним математичним описом взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації. Воно безпосередньо пов'язує математичний опис із фізичними механізмами накопичення зміцнення та релаксації і створює основу для введення узагальнених коефіцієнтів моделі.

Для компактності подальших записів введемо коефіцієнти

$$a(t) = P_2(t) - R_2(t), \quad (9)$$

$$b(t) = P_1(t) - R_1(t), \quad (10)$$

$$c(t) = P_0(t) - R_0(t), \quad (11)$$

Коефіцієнти, визначені співвідношеннями (9) – (11), не є формально введеними параметрами. Коефіцієнт $a(t)$ характеризує різницю нелінійних складових процесів накопичення зміцнення та релаксації. Коефіцієнт $b(t)$ описує зміну балансу цих процесів при малому відхиленні стану матеріалу від вибраного робочого режиму. Коефіцієнт $c(t)$ визначає безпосередній баланс між швидкостями накопичення і релаксації у стані $y = y_*$.

З урахуванням позначень (9) – (11) рівняння (8) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = a(t)z^2 + b(t)z + c(t). \quad (12)$$

Рівняння (12) є узагальненим рівнянням Ріккати зі змінними коефіцієнтами відносно локального відхилення $z(t)$. Воно не постулюється на початку побудови, а виникає як результат локальної квадратичної апроксимації двох фізично різних механізмів – накопичення зміцнення та релаксації. У цьому сенсі рівняння (12) є найпростішою нелінійною моделлю, яка зберігає вплив поточного стану матеріалу на швидкість його подальшої еволюції.

Фізичний зміст коефіцієнтів рівняння (12) впливає безпосередньо з їх визначень. Якщо $c(t) > 0$, то відповідно до співвідношення (11) у робочому стані переважає

накопичення зміцнення. За $c(t) < 0$ домінують релаксаційні процеси, а рівність $c(t) = 0$ відповідає миттєвому балансу обох механізмів.

Знак коефіцієнта $b(t)$, заданого формулою (10), визначає характер лінійної реакції системи на відхилення від робочого стану. Від'ємні значення $b(t)$ відповідають поступовому гальмуванню процесу, тоді як додатні значення свідчать про підсилення швидкості еволюції зі зростанням відхилення $z(t)$.

Коефіцієнт $a(t)$, визначений співвідношенням (9), задає нелінійний зворотний зв'язок. За $a(t) < 0$ квадратичний член обмежує зростання функції стану та відображає насичення процесу зміцнення. Якщо $a(t) > 0$, нелінійний внесок має підсилювальний характер і за певних режимів може призводити до швидкого зростання розв'язку. Тому знак і величина коефіцієнта $a(t)$ мають вирішальне значення для оцінювання стійкості та обмеженості процесу.

Для повернення до початкової функції стану використаємо співвідношення (4). Підставляючи (4) до рівняння (12) та розкриваючи дужки, одержуємо

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^2 + \tilde{b}(t)y + \tilde{c}(t), \quad (13)$$

де $\tilde{b}(t) = b(t) - 2a(t)y_*$, $\tilde{c}(t) = a(t)y_*^2 - b(t)y_* + c(t)$.

Із рівняння (13) видно, що перенесення початку відліку не змінює типу математичної моделі: вона залишається рівнянням Ріккати, а перетворення стосується лише лінійного та вільного коефіцієнтів.

Надалі робочий стан вибиратимемо як початок відліку, тобто покладатимемо $y_* = 0$. Тоді з рівняння (13) випливає остаточно форма задачі Коші

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (14)$$

Отримане узагальнене рівняння Ріккати є центральним елементом побудованої математичної моделі. Воно описує еволюцію узагальненої функції стану в часі та забезпечує єдиний математичний опис взаємодії процесів накопичення зміцнення і релаксації. Використання саме такого рівняння відкриває можливість застосування методів якісної теорії диференціальних рівнянь, дослідження властивостей розв'язків, аналізу впливу параметрів моделі та проведення чисельних експериментів різних режимів процесу термомеханічного зміцнення.

Коефіцієнти рівняння (14), що визначаються співвідношеннями (9) – (11), відображають різні складові взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації. Така конструкція зберігає фізичний зміст вихідного балансового співвідношення та водночас забезпечує компактний математичний опис, придатний для якісного аналізу, чисельного інтегрування і дослідження впливу параметрів технологічного режиму.

Якісний аналіз моделі

Побудована математична модель визначається задачею Коші (14), у якій коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ та $c(t)$ задаються співвідношеннями (9) – (11). На відміну від класичного рівняння Ріккати, у запропонованій моделі зазначені коефіцієнти мають безпосередню фізичну інтерпретацію, що дозволяє пов'язати властивості розв'язку з параметрами процесу термомеханічного зміцнення.

За умови неперервності функцій $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$ на досліджуваному часовому інтервалі права частина рівняння (14) є неперервною та локально ліпшицевою за змінною y . Тому для будь-якого початкового значення

$$y(t_0) = y_0, \quad (15)$$

задача Коші для рівняння (14) має єдиний локальний розв'язок.

Функція (15) відповідно до рівняння (14) визначає миттєву швидкість зміни функції стану.

Для дослідження характеру еволюції процесу введемо функцію

$$F(y, t) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad (16)$$

яка відповідно до рівняння (14) визначає миттєву швидкість зміни функції стану.

Із визначення (16) випливає, що знак функції $F(y, t)$ повністю визначає напрям еволюції процесу. Якщо

$$F(y, t) > 0, \quad (17)$$

то відповідно до рівняння (14) функція стану зростає, тобто процеси накопичення зміцнення переважають над процесами релаксації. Якщо ж

$$F(y, t) < 0, \quad (18)$$

то згідно зі співвідношенням (14) функція $y(t)$ зменшується, що відповідає домінуванню релаксаційних механізмів.

Нерівність (17) означає, що швидкість еволюції є додатною, тому відповідно до рівняння (14) процес накопичення зміцнення переважає над процесами релаксації. Нерівність (18) відповідає від'ємній швидкості еволюції, що згідно з рівнянням (14) характеризує переважання релаксаційних процесів.

Вплив окремих коефіцієнтів рівняння (14) на характер еволюції має різну фізичну природу. Коефіцієнт $c(t)$, визначений формулою (11), задає початковий баланс між накопиченням зміцнення та релаксацією. Коефіцієнт $b(t)$, введений співвідношенням (10), характеризує лінійну реакцію системи на зміну її поточного стану. Найважливішу роль відіграє коефіцієнт $a(t)$, визначений співвідношенням (9), оскільки саме він формує нелінійний зворотний зв'язок.

Якщо

$$a(t) < 0, \quad (19)$$

то квадратичний член у рівнянні (14) обмежує подальше зростання функції стану. У міру збільшення рівня зміцнення його внесок стає дедалі істотнішим, що приводить до поступового зменшення швидкості еволюції. Такий режим відповідає фізично природному ефекту тенденції до насичення процесу термомеханічного зміцнення.

Умова (19) визначає режим негативного нелінійного зворотного зв'язку, за якого зі збільшенням функції стану швидкість процесу поступово зменшується.

У випадку

$$a(t) > 0, \quad (20)$$

квадратична складова рівняння (14), навпаки, підсилює швидкість зміни функції стану. За таких умов інтенсивність накопичення структурних змін може істотно зростати,

тому відповідні режими потребують додаткового контролю під час чисельного інтегрування.

Умова (20) відповідає підсилювальному характеру квадратичного члена рівняння (14), що може призводити до прискореного розвитку процесу.

Для оцінювання чутливості моделі до зміни функції стану обчислимо похідну функції (16)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2a(t)y + b(t). \quad (21)$$

Похідна (21) характеризує локальну зміну швидкості еволюції при зміні поточного стану матеріалу. Якщо

$$2a(t)y + b(t) < 0, \quad (22)$$

то зі збільшенням функції стану швидкість процесу зменшується, що відповідає стабілізації еволюції та поступовому наближенню до режиму тенденції до насичення.

Нерівність (22) означає, що похідна (21) є від'ємною, а отже, швидкість еволюції зменшується зі зростанням функції стану.

Якщо ж

$$2a(t)y + b(t) > 0, \quad (23)$$

то згідно з похідною (21) швидкість еволюції зростає разом зі збільшенням функції стану, що свідчить про підсилення нелінійного ефекту.

Нерівність (23) свідчить, що похідна (21) є додатною, тому зі збільшенням функції стану швидкість еволюції також зростає.

Для фізично допустимих режимів доцільно вимагати невід'ємності функції стану. Зокрема, якщо

$$c(t) \geq 0, \quad (24)$$

то відповідно до визначення коефіцієнта (11) швидкість зміни функції стану в околі $y=0$ є невід'ємною, що забезпечує відсутність переходу розв'язку до фізично беззмістовних від'ємних значень.

Таким чином, аналіз рівняння (14) показав, що характер еволюції процесу термомеханічного зміцнення визначається спільною дією коефіцієнтів (9) – (11). Коефіцієнт $c(t)$ задає початковий напрям розвитку процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає його лінійну реакцію, а коефіцієнт $a(t)$ формує нелінійний механізм тенденції до насичення або прискорення. Отримані результати є підґрунтям для вибору параметрів моделі та побудови алгоритму чисельного розв'язування, наведеного в наступному підрозділі.

Алгоритм чисельного розв'язування

Оскільки коефіцієнти рівняння (14) є змінними функціями часу, отримати його аналітичний розв'язок у загальному випадку практично неможливо. Тому для дослідження еволюції процесу термомеханічного зміцнення використано класичний метод Рунге–Кутти четвертого порядку, який забезпечує високу точність інтегрування за помірних обчислювальних витрат.

Чисельне розв'язування виконується для задачі Коші (14) з початковою умовою (15). Для скорочення записів праву частину рівняння (14) подамо у вигляді

$$f(t, y) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \quad (25)$$

Функція (25) визначає миттєву швидкість зміни функції стану та використовується на всіх етапах чисельного інтегрування.

Нехай часовий інтервал дослідження $[t_0, T]$ розбито на N рівних кроків довжиною

$$h = \frac{T - t_0}{N}. \quad (26)$$

Величина кроку інтегрування визначається співвідношенням (26) і вибирається з урахуванням необхідної точності розрахунків та характеру зміни коефіцієнтів рівняння (14).

Позначимо наближене значення функції стану у вузлі t_n через y_n . Відповідно до методу Рунге–Кутти четвертого порядку обчислюються проміжні прирости

$$k_1 = h f(t_n, y_n), \quad (27)$$

$$k_2 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (28)$$

$$k_3 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (29)$$

$$k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3). \quad (30)$$

Коефіцієнт k_1 , визначений формулою (27), характеризує нахил інтегральної кривої на початку кроку інтегрування. Значення k_2 та k_3 , обчислені за співвідношеннями (28) і (29), уточнюють оцінку похідної в середині кроку, а коефіцієнт k_4 , визначений формулою (30), враховує поведінку розв'язку наприкінці інтервалу.

Після обчислення коефіцієнтів (27) – (30) наближене значення функції стану на наступному часовому кроці визначається співвідношенням

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (31)$$

Формула (31) забезпечує четвертий порядок точності за кроком інтегрування та дозволяє отримати стійкий чисельний розв'язок для широкого класу функцій $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$.

Таким чином, алгоритм чисельного розв'язування складається з таких послідовних етапів.

1. Задати часовий інтервал дослідження, початкову умову (15), коефіцієнти моделі (9) – (11) та обчислити крок інтегрування за формулою (26).
2. Для поточного вузла сітки обчислити значення функції (25).
3. Послідовно визначити коефіцієнти $k_1 - k_4$ за формулами (27) – (30).
4. Обчислити нове значення функції стану за формулою (31).
5. Перейти до наступного вузла часової сітки та повторювати обчислення до досягнення кінцевого моменту часу T .

На кожному кроці інтегрування коефіцієнти моделі можуть змінюватися відповідно до заданого температурного та силового режимів. Це дозволяє

безпосередньо враховувати вплив зміни технологічних параметрів на процес термомеханічного зміцнення без модифікації структури алгоритму.

Метод Рунге–Кутти четвертого порядку характеризується локальною похибкою порядку $O(h^5)$ та глобальною похибкою порядку $O(h^4)$. Тому зменшення кроку інтегрування, визначеного співвідношенням (26), забезпечує збіжність чисельного розв'язку до точного за умови достатньої гладкості функції (25).

Обчислювальна складність алгоритму є лінійною відносно кількості вузлів часової сітки, оскільки на кожному кроці виконується фіксована кількість арифметичних операцій і чотири обчислення функції (25). Це робить запропонований алгоритм придатним для багаторазових параметричних розрахунків і проведення серій чисельних експериментів.

Наведений алгоритм використано для дослідження впливу коефіцієнтів моделі (9)–(11) на еволюцію функції стану, результати якого наведено в наступному підрозділі.

Чисельний експеримент

Для перевірки працездатності моделі (14) та дослідження впливу її коефіцієнтів проведено серію чисельних експериментів. Розрахунки виконано за алгоритмом Рунге–Кутти четвертого порядку, наведеним у попередньому підрозділі. Початкове значення функції стану прийнято рівним $y_0 = 0,1$.

Інтегрування виконувалося на часовому інтервалі

$$t \in [0; 10]. \quad (32)$$

Інтервал (32) розбивався на рівномірну сітку з кроком

$$h = 0,01. \quad (33)$$

Значення кроку (33) надалі перевірялося шляхом повторних розрахунків на згущених часових сітках.

Для чисельного дослідження вибрано три режими зі змінними коефіцієнтами. У всіх випадках коефіцієнт $a(t)$ залишався від'ємним, що забезпечувало негативний нелінійний зворотний зв'язок і виключало штучне вибухове зростання розв'язку. Параметри режимів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Функції коефіцієнтів для чисельного експерименту

Режим	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$	Характер режиму
I	$-0,35[1 + 0,12\sin(0,5t)]$	$0,18 + 0,04e^{-0,4t}$	$0,30 - 0,05e^{-0,8t}$	Помірний режим насичення
II	$-0,75[1 + 0,10\sin(0,5t)]$	$0,35 + 0,03e^{-0,4t}$	$0,50 - 0,08e^{-0,8t}$	Інтенсивний початковий процес із сильнішим нелінійним обмеженням
III	$-0,14[1 + 0,08\sin(0,5t)]$	$0,46 + 0,04e^{-0,4t}$	$0,24 - 0,04e^{-0,8t}$	Прискорене накопичення за слабшого ефекту насичення

Залежності $y(t)$, отримані для параметрів із табл. 1, наведено на рис. 1.

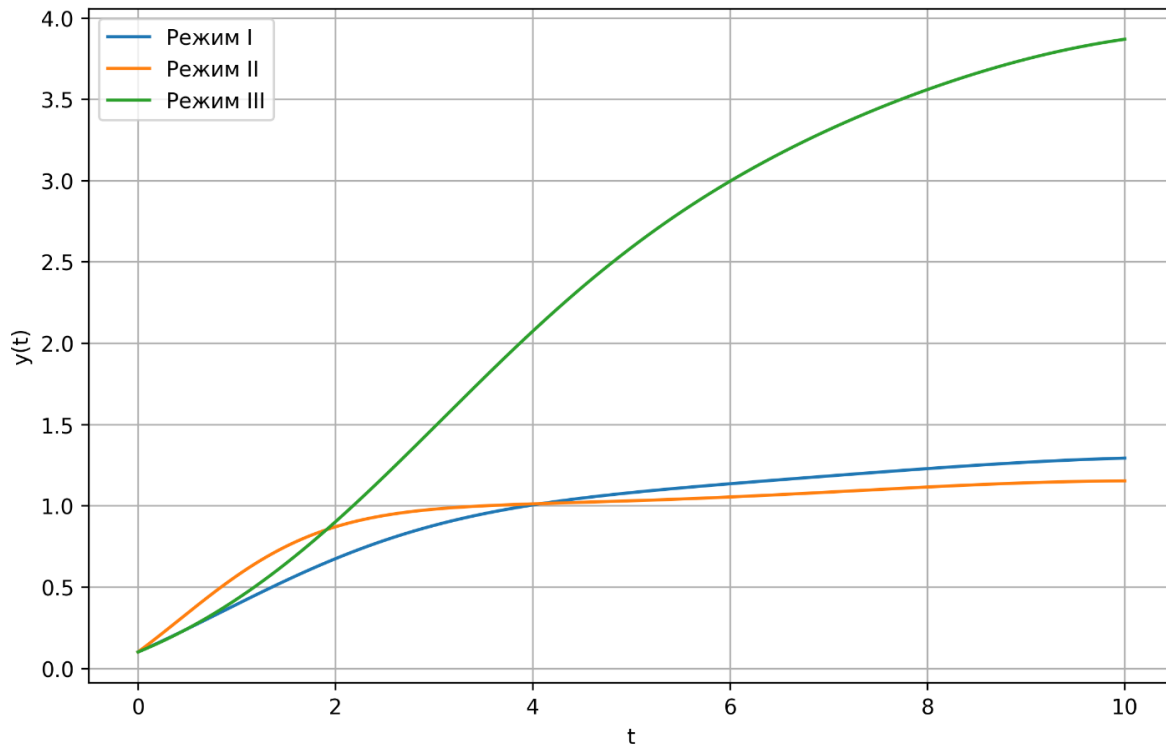


Рис. 1. Еволюція функції стану для трьох режимів термомеханічного зміцнення

У всіх розглянутих режимах функція стану залишається невід'ємною та монотонно зростає. Для режиму I характерне плавне накопичення зміцнення з поступовим зменшенням швидкості процесу. У режимі II початкове зростання є інтенсивнішим, однак більше за модулем від'ємне значення $a(t)$ посилює нелінійне обмеження, унаслідок чого функція стану демонструє більш виражену тенденцію до стабілізації. У режимі III слабший нелінійний зворотний зв'язок поєднується з більшим додатним лінійним внеском, тому на кінці інтервалу (32) отримано найвище значення функції стану.

Кількісні результати чисельного інтегрування наведено в табл. 2. Для порівняння режимів визначали значення $y(10)$, максимальне значення функції стану на інтервалі (32) та момент досягнення рівня, що становить 95 % від $y(10)$.

Таблиця 2

Основні результати чисельного моделювання

Режим	$y(10)$	$\max y(t)$	Час досягнення $0,95y(10)$
I	1,2923	1,2923	8,00
II	1,1524	1,1524	7,37
III	3,8688	3,8688	8,59

Результати табл. 2 підтверджують, що збільшення модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ не обов'язково підвищує кінцевий рівень зміцнення. У режимі II воно насамперед посилює ефект насичення, обмежуючи подальше зростання $y(t)$. Найбільше значення $y(10) = 3,8688$ отримано для режиму III, у якому нелінійне обмеження є найслабшим.

Для окремого аналізу ролі квадратичного коефіцієнта виконано додаткові розрахунки за однакових функцій $b(t)$ і $c(t)$, але за різної амплітуди $a(t)$. В усіх трьох випадках прийнято

$$b(t) = 0,30 + 0,03e^{-0,4t}, \quad c(t) = 0,32 - 0,05e^{-0,8t},$$

а базове значення коефіцієнта $a(t)$ змінювалося від $-0,75$ до $-0,14$. Отримані залежності наведено на рис. 2.

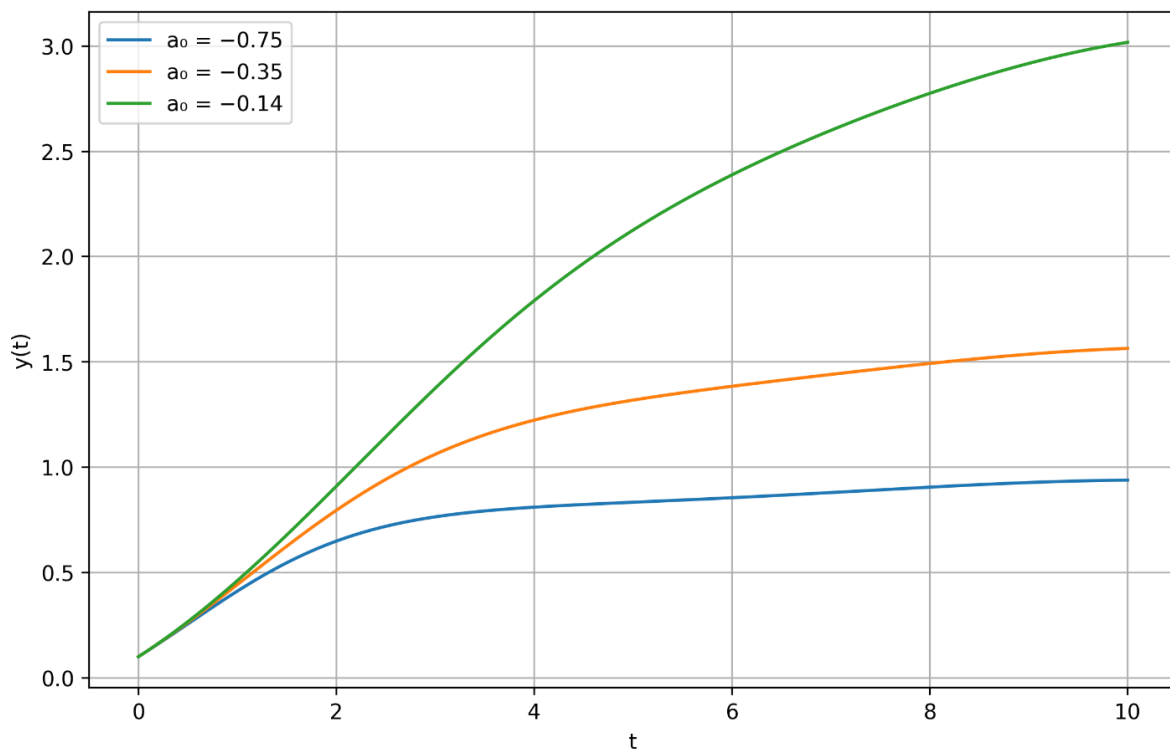


Рис. 2. Вплив коефіцієнта $a(t)$ на еволюцію функції стану

З наведених на рис. 2 залежностей видно, що зі збільшенням модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ нелінійне гальмування посилюється, а граничний рівень функції стану зменшується. За меншого модуля $a(t)$ процес довше зберігає високу швидкість, унаслідок чого досягається значно вищий рівень зміцнення. Цей результат узгоджується з якісним аналізом рівняння (14), згідно з яким від'ємний квадратичний член формує механізм насичення.

Проведений чисельний експеримент підтвердив працездатність моделі (14) та розробленого алгоритму. Запропонована конструкція відтворює режими поступового насичення, інтенсивного початкового зміцнення і тривалого прискореного накопичення структурних змін без зміни загальної форми рівняння. Отримані результати також показують, що коефіцієнт $a(t)$ визначає інтенсивність нелінійного обмеження, тоді як функції $b(t)$ і $c(t)$ задають лінійне підсилення та зовнішню складову процесу.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати підтверджують, що запропонований підхід до математичного моделювання процесу термомеханічного зміцнення дозволяє перейти від загального фізичного опису взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації до компактної математичної моделі, придатної для теоретичного аналізу й чисельного дослідження. На відміну від моделей, у яких рівняння Ріккати використовується лише як зручний математичний апарат, у даній роботі воно отримане як наслідок локальної квадратичної

апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації. Це забезпечує фізичну інтерпретацію коефіцієнтів моделі та встановлює зв'язок між їх математичним змістом і параметрами технологічного процесу.

Проведений якісний аналіз показав, що характер еволюції функції стану визначається спільною дією коефіцієнтів $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$. Зокрема, коефіцієнт $a(t)$ формує нелінійний механізм саморегулювання процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає інтенсивність лінійної реакції системи на зміну її поточного стану, а коефіцієнт $c(t)$ характеризує початковий баланс між процесами накопичення зміцнення та релаксації.

Результати чисельного експерименту підтвердили основні висновки якісного аналізу. Зокрема, збільшення модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ приводить до більш вираженого нелінійного обмеження швидкості зміни функції стану, тоді як його зменшення сприяє тривалішому інтенсивному накопиченню зміцнення. При цьому зміна коефіцієнтів $b(t)$ і $c(t)$ дозволяє моделювати різні початкові режими розвитку процесу без зміни загальної структури математичної моделі.

Порівняно з відомими підходами, що ґрунтуються на використанні лінійних або емпіричних залежностей, запропонована модель має низку переваг. По-перше, вона враховує нелінійну взаємодію процесів накопичення зміцнення та релаксації в межах єдиного математичного опису. По-друге, змінні коефіцієнти рівняння дозволяють враховувати зміну температурного режиму, механічного навантаження та інших факторів без перебудови структури моделі. По-третє, компактний вигляд рівняння (14) забезпечує можливість застосування стандартних чисельних методів інтегрування, що суттєво спрощує проведення багаторазових параметричних розрахунків.

До основних переваг запропонованої математичної моделі належать компактність математичного опису, фізична інтерпретованість її коефіцієнтів, можливість врахування зміни технологічних параметрів без зміни структури рівняння, а також придатність до ефективного чисельного моделювання та проведення багаторазових параметричних досліджень.

Слід зазначити, що запропонована модель не замінює класичні моделі термомеханіки, побудовані на системах рівнянь теплопровідності, рівноваги та визначальних співвідношень. Її призначення полягає у формуванні узагальненого математичного опису еволюції процесу зміцнення, який може використовуватися для аналізу закономірностей процесу, параметричних досліджень і попередньої оцінки впливу технологічних режимів без побудови повномасштабних чисельних моделей.

Запропонований підхід не претендує на універсальний опис усіх процесів термомеханічного зміцнення. Побудована модель є узагальненою і базується на локальній квадратичній апроксимації вихідних функцій, тому її застосування є найбільш обґрунтованим у тих режимах, для яких таке наближення адекватно відображає реальну фізичну поведінку матеріалу. Для задач із різко вираженими нелінійностями або структурними перетвореннями може виникнути необхідність використання апроксимацій вищих порядків або розширення моделі шляхом введення додаткових змінних стану.

Практична цінність запропонованої моделі полягає у можливості прогнозування характеру еволюції процесу термомеханічного зміцнення за різних режимів навантаження та температурного впливу. Це створює передумови для використання моделі під час вибору раціональних параметрів технологічних процесів для аналізу впливу температурних режимів, механічних навантажень і технологічних параметрів на еволюцію процесу зміцнення, вибору раціональних режимів обробки матеріалів та проведення комп'ютерних параметричних експериментів без необхідності виконання великої кількості натурних випробувань.

Подальший розвиток дослідження доцільно пов'язати з верифікацією запропонованої моделі за результатами експериментальних досліджень або детального чисельного моделювання конкретних технологічних процесів термомеханічного зміцнення.

Побудована модель поєднує фізичну обґрунтованість, відносну математичну простоту та можливість ефективної чисельної реалізації, що робить її перспективною для подальших досліджень процесів термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл.

6 ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано математичну модель процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, побудовану на основі узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами. На відміну від традиційного використання рівняння Ріккати як апіорно заданої математичної моделі, у запропонованому підході воно отримане як наслідок локальної квадратичної апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації, що забезпечило фізичну інтерпретацію всіх коефіцієнтів моделі.

Проведений якісний аналіз показав, що характер еволюції функції стану визначається спільною дією коефіцієнтів моделі. Встановлено, що коефіцієнт $a(t)$ відповідає за нелінійний механізм саморегулювання процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає інтенсивність лінійної реакції системи, а коефіцієнт $c(t)$ характеризує початковий баланс між процесами накопичення зміцнення та релаксації. Отримані результати дозволяють оцінювати умови стабілізації процесу та прогнозувати характер його подальшого розвитку.

Для чисельного дослідження моделі розроблено алгоритм розв'язування задачі Коші на основі класичного методу Рунге–Кутти четвертого порядку. Запропонований алгоритм забезпечує високу точність інтегрування, є обчислювально ефективним і не потребує модифікації при зміні функціонального вигляду коефіцієнтів моделі.

Проведений чисельний експеримент підтвердив працездатність побудованої моделі та узгодженість результатів якісного аналізу з даними чисельного моделювання. Показано, що зміна коефіцієнтів рівняння дозволяє відтворювати різні режими еволюції процесу термомеханічного зміцнення, а найбільший вплив на характер розв'язку має нелінійний коефіцієнт $a(t)$, який визначає інтенсивність ефекту насичення.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі для комп'ютерного моделювання процесів термомеханічного зміцнення, дослідження впливу технологічних параметрів на еволюцію структурного стану матеріалу та проведення параметричних чисельних експериментів без необхідності виконання значної кількості натурних випробувань.

Подальший розвиток досліджень доцільно спрямувати на врахування просторової неоднорідності матеріалу, температурної залежності його фізико-механічних характеристик та побудову багатопараметричних моделей термомеханічного зміцнення для складних технологічних процесів.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Green A. E., Naghdi P. M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1991. Vol. 432, No. 1885. P. 171–194. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012>.
2. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. Vol. 15, No. 5. P. 299–309. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5).
3. Green A. E., Lindsay K. A thermoelasticity. *Journal of Elasticity*. 1972. Vol. 2, No. 1. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00045689>.
4. Shakeriaski F., Ghodrat M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: A review. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2021. Vol. 8, No. 1. P. 15–35. DOI: <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082>.
5. Abo-Dahab S. M., Abouelregal A. E. Thermoelastic medium in the context of four theories subjected to gravity field and laser pulse. *Waves in Random and Complex Media*. 2024. Vol. 34, No. 1. P. 95–118. DOI: <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1898699>.
6. Abouelregal A. E. On a multi-phase-lag model of coupled thermoelasticity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2020. Vol. 116. Article 104682. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682>.
7. Hart E. L., Hudramovich V. S. Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022. No. 108. P. 77–86. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>.
8. Kushnir R., Yasinsky A., Tokovyy Yu., Hart E. Inverse thermoelastic analysis of a bimaterial cylinder with interfacial friction. *Materials*. 2021. Vol. 14. Article 2657. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14102657>.
9. Siasiev A., Dreus A., Horbonos S., Balanenko I., Dziuba S. The stressed-strained state of a rod at crystallization considering the mutual influence of temperature and mechanical fields. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 3, No. 5 (105). P. 38–49. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.203330>.
10. Siasiev A. Mathematical Modelling of Manufacturing Processes of Parts and Structural Elements by Build-up Methods. *European Science*. 2022. Vol. 1, No. 12–01. P. 66–103. DOI: <https://doi.org/10.30890/2709-2313.2022-12-01-002>.
11. Siasiev A. V., Bilichenko R. O. Construction of a non-linear analytical model for the rotation parts building up process using regression analysis. *Researches in Mathematics*. 2024. Vol. 32, No. 1. P. 16–32. DOI: <https://doi.org/10.15421/242413>.
12. Сясев, А. В., Косташук, М. В. Моделювання процесу кристалізації стрижня з урахуванням взаємного впливу температурних і механічних полів. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Моделювання*. 2015. Т. 23, № 8. С. 9–28.
13. Liu Y., Long H., Zhang S., Zhou Q., Song J., Wei Y. Coupling effect of strain gradient strengthening and thermal softening on the microscale plastic behavior of metallic materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2023. Vol. 102. Article 105117. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105117>.
14. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. No. 110. P. 63–80. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>.
15. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2021. Vol. 29, No. 1. P. 42–53. DOI: <https://doi.org/10.15421/142103>.
16. Hu Y. F., Ho H. C., Chung K. F., Xiao M., Liu X., Nethercot D. A. Integrated and coordinated numerical simulations on fabrication processes of high-strength S690 cold-formed circular hollow sections. *Engineering Structures*. 2023. Vol. 279. Article 115620. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115620>.
17. Wang K., Zhou J., Ma Y., Ding A., Chen X. Constitutive and numerical modeling for the coupled thermal-hydro-mechanical processes in dual-porosity geothermal reservoir. *Applied Thermal*

Engineering, 2023. Vol. 223. Article 120027. DOI:
<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.120027>.

References

1. Green, A. E., & Naghdi, P. M. (1991). A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 432(1885), 171–194. [in English] [doi:10.1098/rspa.1991.0012](https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012)
2. Lord, H. W., & Shulman, Y. (1967). A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(5), 299–309. [in English] [doi:10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
3. Green, A. E., & Lindsay, K. (1972). Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 2(1), 1–7. [in English] [doi:10.1007/BF00045689](https://doi.org/10.1007/BF00045689)
4. Shakeriasaki, F., Ghodrat, M., Escobedo-Diaz, J., & Behnia, M. (2021). Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: A review. *Journal of Computational Design and Engineering*, 8(1), 15–35. [in English] [doi:10.1093/jcde/qwaa082](https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082)
5. Abo-Dahab, S. M., & Abouelregal, A. E. (2024). Thermoelastic medium in the context of four theories subjected to gravity field and laser pulse. *Waves in Random and Complex Media*, 34(1), 95–118. [in English] [doi:10.1080/17455030.2021.1898699](https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1898699)
6. Abouelregal, A. E. (2020). On a multi-phase-lag model of coupled thermoelasticity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116, Article 104682. [in English] [doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682](https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682)
7. Hart, E. L., & Hudramovich, V. S. (2022). Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 108, 77–86. [in English] [doi:10.32347/2410-2547.2022.108.77-86](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86)
8. Kushnir, R., Yasinsky, A., Tokovyy, Y., & Hart, E. (2021). Inverse thermoelastic analysis of a bimaterial cylinder with interfacial friction. *Materials*, 14, Article 2657. [in English] [doi:10.3390/ma14102657](https://doi.org/10.3390/ma14102657)
9. Siasiev, A., Dreus, A., Horbonos, S., Balanenko, I., & Dziuba, S. (2020). The stressed-strained state of a rod at crystallization considering the mutual influence of temperature and mechanical fields. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(5[105]), 38–49. [in English] [doi:10.15587/1729-4061.2020.203330](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.203330)
10. Siasiev, A. (2022). Mathematical modelling of manufacturing processes of parts and structural elements by build-up methods. *European Science*, 1(12–01), 66–103. [in English] [doi:10.30890/2709-2313.2022-12-01-002](https://doi.org/10.30890/2709-2313.2022-12-01-002)
11. Siasiev, A. V., & Bilichenko, R. O. (2024). Construction of a non-linear analytical model for the rotation parts building up process using regression analysis. *Researches in Mathematics*, 32(1), 16–32. [in English] [doi:10.15421/242413](https://doi.org/10.15421/242413)
12. Siasiev, A. V., & Kostashchuk, M. V. (2015). Modeliuvannia protsesu krystalizatsii stryzhnia z urakhuvanniam vzaiemnoho vplyvu temperaturnykh i mekhanichnykh poliv [Modeling of the rod crystallization process taking into account the mutual influence of thermal and mechanical fields]. *Visnyk Dnipropetrovskoho Universytetu. Seriya: Modeliuvannia*, 23(8), 9–28. [in Ukrainian]
13. Liu, Y., Long, H., Zhang, S., Zhou, Q., Song, J., & Wei, Y. (2023). Coupling effect of strain gradient strengthening and thermal softening on the microscale plastic behavior of metallic materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 102, Article 105117. [in English] [doi:10.1016/j.euromechsol.2023.105117](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105117)
14. Hart, E. L., & Terokhin, B. I. (2023). Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 110, 63–80. [in English] [doi:10.32347/2410-2547.2023.110.63-80](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80)
15. Hart, E. L., & Terokhin, B. I. (2021). Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 29(1), 42–53. [in English] [doi:10.15421/142103](https://doi.org/10.15421/142103)

16. Hu, Y. F., Ho, H. C., Chung, K. F., Xiao, M., Liu, X., & Nethercot, D. A. (2023). Integrated and coordinated numerical simulations on fabrication processes of high-strength S690 cold-formed circular hollow sections. *Engineering Structures*, 279, Article 115620. [in English]
[doi:10.1016/j.engstruct.2023.115620](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115620)
17. Wang, K., Zhou, J., Ma, Y., Ding, A., & Chen, X. (2023). Constitutive and numerical modeling for the coupled thermal-hydro-mechanical processes in dual-porosity geothermal reservoir. *Applied Thermal Engineering*, 223, Article 120027. [in English]
[doi:10.1016/j.applthermaleng.2023.120027](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.120027)

Сясєв Андрій Валерійович

к.ф.-м.н., доцент

syasevandri@gmail.com,

[ORCID: 0000-0002-0654-7360](https://orcid.org/0000-0002-0654-7360)

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49045

Стаття надійшла до редакції 16.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Сясєв А.В. Математичне моделювання процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккаті. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 7–26.

For references:

A. Siasiev (2026). Mathematical modeling of thermomechanical hardening in deformable solids based on a generalized Riccati equation. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 7–26.

[Математичне моделювання процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккаті](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-7-26) © 2026 by [Сясєв А.В.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)