

УДК 004.94:519.21

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО МЕТОДУ ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНІВ ХАОТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нечипорук О.П.¹, Апенько Н.В.¹, Бузун О.Г.¹, Тупота Є.В.¹

¹Національний університет «Київський авіаційний інститут»

Анотація: У роботі розроблено математичний метод прогнозування станів хаотичних динамічних систем з урахуванням локальної нелінійності, спектральних властивостей оператора переходу та обмеженої передбачуваності хаотичних процесів. Актуальність дослідження зумовлена високою чутливістю хаотичних систем до початкових умов, унаслідок чого незначні похибки оцінювання поточного стану спричиняють розходження прогнозованої та фактичної траєкторій зі збільшенням горизонту прогнозування. Запропонований метод передбачає реконструкцію багатовимірного простору станів за часовою послідовністю, формування локальної області атратора та побудову квадратичного нелінійного оператора еволюції.

Наукова новизна полягає у поєднанні локального прогнозування стану, аналізу дотичної динаміки та оцінювання прогнозованої невизначеності в єдиній математичній процедурі. Для локальної характеристики переходу використано матрицю Якобі, тоді як накопичене скінченно-часове деформування оцінювалося за сингулярним спектром результуючого оператора переходу. Поширення прогнозованої невизначеності виконувалося з урахуванням квадратичної кривизни локального оператора. Допустимий горизонт прогнозування визначався адаптивно за спільною умовою неперевищення допустимого розміру області невизначеності та граничної інтенсивності локального розходження траєкторій.

Для перевірки працездатності методу проведено імітаційне моделювання системи Лоренца у середовищі Python. Результати показали, що на початковому інтервалі прогнозована траєкторія зберігала близькість до фактичної, тоді як зі збільшенням горизонту спостерігалось закономірне зростання похибки. Встановлено, що запропонований підхід дозволяє не лише формувати прогноз майбутнього стану, а й визначати часову область, в межах якої прогноз залишається практично інформативним для досліджуваної системи.

Ключові слова: хаотична динамічна система, прогнозування станів, нелінійний оператор, реконструкція простору станів, локальна нестійкість, спектральний аналіз, горизонт прогнозування, імітаційне моделювання.

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL METHOD FOR PREDICTING THE STATES OF CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS

O. Nechiporuk¹, N. Apenko¹, O. Buzun¹, Y. Tupota¹

¹National University "Kyiv Aviation Institute"

Abstract: This paper presents a mathematical method for predicting the states of chaotic dynamic systems, taking into account local non-linearity, the spectral properties of the transition operator, and the limited predictability of chaotic processes. The relevance of the research stems from the high sensitivity of chaotic systems to initial conditions, as a result of which minor errors in estimating the current state cause discrepancies between the predicted and actual trajectories as the prediction horizon increases. The proposed method involves reconstructing the multidimensional state space along a time sequence, defining a local attractor region and constructing a quadratic nonlinear evolution operator.

The scientific novelty lies in the combination of local state prediction, analysis of tangential dynamics and estimation of prediction uncertainty within a single mathematical procedure. The



Jacobian matrix was used for the local characterisation of the transition, whilst the accumulated finite-time deformation was estimated using the singular spectrum of the resulting transition operator. The propagation of forecast uncertainty was carried out taking into account the quadratic curvature of the local operator. The permissible forecast horizon was determined adaptively based on a combined condition of not exceeding the permissible size of the uncertainty region and the limit intensity of local divergence of trajectories.

To verify the effectiveness of the method, a simulation of the Lorenz system was carried out in Python. The results showed that, over the initial interval, the predicted trajectory remained close to the actual one, whilst a systematic increase in error was observed as the forecast horizon increased. It was established that the proposed approach allows not only for the generation of a forecast of the future state, but also for the determination of the time domain within which the forecast remains practically informative for the system under study.

Keywords: chaotic dynamical system, state prediction, nonlinear operator, state-space reconstruction, local instability, spectral analysis, forecast horizon, simulation modelling.

1 ВСТУП

Прогнозування станів хаотичних динамічних систем є складною задачею через нелінійність процесів, високу чутливість до початкових умов та швидке накопичення похибок зі збільшенням горизонту прогнозу.

Для таких систем недостатньо використовувати лише класичні методи екстраполяції часових послідовностей, оскільки вони не враховують локальну структуру простору станів і характер розходження траєкторій.

Тому актуальним є формування математичних методів, що поєднують реконструкцію стану, оцінювання локальної нелінійної динаміки та визначення допустимого горизонту прогнозування.

Методи математичного забезпечення складних інформаційних систем і прийняття рішень, що ґрунтуються на формалізованому представленні станів та їх взаємозв'язків, розглянуто у [1]. Подальший розвиток таких підходів потребує врахування саме хаотичного характеру досліджуваних процесів та зміни їх передбачуваності в часі.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Питання математичного опису складних інформаційних процесів за наявності шумів та невизначеності розглядалися у [2], а методологічні підходи до оцінювання стану складних організаційно-технічних систем [3]. У роботі [4] запропоновано математичну модель надійних структур інформаційно-керуючих систем, що підтверджує доцільність використання формалізованого опису структурних взаємозв'язків між станами систем.

Проблеми передачі та обробки інформації в умовах невизначеності досліджувалися у [5], тоді як у [6] для опису складних нелінійних перетворень використано комплексні нейронні мережі.

Методи пошуку розв'язків у складних багатопараметричних просторах на основі популяційної оптимізації розглянуто у [7]. Підходи [5–7] демонструють ефективність нелінійного й оптимізаційного опрацювання даних, однак безпосередньо не вирішують задачу прогнозування еволюції хаотичних станів.

У роботах [8–9] досліджено методи виявлення відхилень і аномальних станів у складних інформаційних середовищах. Математичний опис адаптивного керування потоками даних наведено у [10], де враховано динамічну зміну параметрів інформаційного процесу.

Безпосередньо просторово-часова хаотична динаміка дискретно-неперервних систем досліджена у [11], що підтверджує необхідність урахування структурних змін і нестійкості траєкторій під час аналізу таких процесів.

У [12] розглянуто функціонування інформаційної системи на основі багатовимірних часових рядів, що створює передумови для переходу від аналізу окремих спостережень до багатовимірного представлення стану системи.

Таким чином, відомі підходи охоплюють окремі складові аналізу нелінійних динамічних процесів, зокрема реконструкцію багатовимірного представлення стану, локальне моделювання динаміки, дослідження нестійкості траєкторій та аналіз часових рядів. Водночас недостатньо опрацьованим залишається їх спільне використання в межах єдиної процедури прогнозування, у якій локальна нелінійна модель не лише формує майбутній стан, а й використовується для оцінювання накопиченого деформування фазового простору та зміни прогнозованої невизначеності.

Особливо актуальним є визначення допустимого горизонту прогнозування не як наперед заданої кількості кроків, а як характеристики, що залежить від локальної

геометрії траєкторії, інтенсивності скінченно-часового розходження близьких станів та розміру області прогнозованої невизначеності.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю дослідження є розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем шляхом моделювання локальної нелінійної еволюції, оцінювання спектральних характеристик операторів переходу та адаптивного визначення допустимого горизонту прогнозування.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для розробки математичного методу прогнозування станів хаотичної динамічної системи було використано локальне представлення нелінійного оператора її еволюції. Вихідна часова послідовність розглядалася як проєкція траєкторії системи у просторі станів. Тому прогнозування виконувалося не шляхом екстраполяції окремого значення, а шляхом оцінювання переходу між послідовними станами реконструйованого атрактора.

Наукова новизна запропонованого методу полягає не в окремому використанні реконструкції простору станів, матриці Якобі, спектрального аналізу або сингулярного розкладання, а у їх функціональному об'єднанні в єдиній математичній конструкції прогнозування. Локально ідентифікований квадратичний оператор одночасно використовується для рекурентного формування прогнозованих станів і побудови локального дотичного відображення. Послідовність отриманих матриць Якобі композиціюється на заданому часовому інтервалі, після чого за сингулярним спектром результуючого оператора оцінюється накопичене скінченно-часове деформування фазового простору. Паралельно з цим виконується поширення прогнозованої невизначеності з урахуванням квадратичної кривизни локального оператора.

У результаті допустимий горизонт прогнозування визначається спільно за динамічною нестійкістю та геометричним розширенням області невизначеності.

Вихідну послідовність x_k було перетворено до реконструйованого стану:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\tau} \\ \vdots \\ x_{k-(m-1)\tau} \end{bmatrix}, \quad k = (m-1)\tau + 1, \dots, N. \quad (12)$$

Сукупність отриманих станів утворювала реконструйовану траєкторію хаотичної системи (1). Для кожного її поточного положення формувалася локальна область, геометрія якої визначалася не звичайною евклідовою відстанню, а локальною коваріаційною структурою:

$$C_k = \frac{1}{K-1} \sum_{j \in \Omega_k} (z_j - \bar{z}_k)(z_j - \bar{z}_k)^T + \eta I, \quad \Omega_k = \{j : (z_j - z_k)^T C_k^{-1} (z_j - z_k) \leq \varepsilon^2\}. \quad (13)$$

В межах Ω_k динаміка розглядалася як локально гладка, однак не лінійна (2). Для збереження квадратичних взаємодій між фазовими координатами стан переносився до розширеного простору:

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z \otimes z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1+m+m^2}. \quad (14)$$

Для локальної області формувалися матриці Φ_k^T та Z_k^+ , що містили відповідно перетворені поточні стани та фактичні стани системи на наступному часовому кроці. Оператор переходу визначався регуляризованим розв'язком:

$$\Theta_k = Z_k^+ W_k \Phi_k^T (\Phi_k W_k \Phi_k^T + \lambda I)^{-1}. \quad (15)$$

Отриманий оператор поділявся відповідно до лінійної та квадратичної частин локальної еволюції:

$$\Theta_k = [a_k \quad A_k \quad B_k], \quad F_k(z) = a_k + A_k z + B_k(z \otimes z). \quad (16)$$

В результаті багатокроковий прогноз формувався послідовним застосуванням локального нелінійного оператора:

$$\hat{z}_{k+r+1|k} = F_{k+r}(\hat{z}_{k+r|k}), \quad \hat{z}_{k|k} = z_k. \quad (17)$$

Однак для хаотичної системи самого отримання $\hat{z}_{k+r|k}$ було недостатньо. Необхідно було встановити, як змінюється мале відхилення початкового стану під дією побудованого оператора. Лінеаризація (5) поблизу z_k приводила до матриці:

$$J_k = A_k + B_k(I \otimes z_k + z_k \otimes I). \quad (18)$$

Локальні множники розширення або стискання траєкторії було визначено коренями характеристичного рівняння. Для тривимірного реконструйованого стану воно набувало вигляду:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0. \quad (19)$$

Власні значення матриці J_k використовувалися для спектральної характеристики локально лінеаризованого однокрокового відображення. Їх положення у комплексній площині характеризує поведінку окремих власних мод локального оператора. Водночас власні значення не ототожнювалися з максимальними коефіцієнтами розтягнення фазового простору.

Для ненормальної матриці J_k , власні вектори якої не є ортогональними, можливе скінченно-часове підсилення норми збурення, яке не визначається безпосередньо модулями власних значень. Тому характеристичне рівняння (8) використовувалося для модального аналізу локального переходу, тоді як оцінювання фактичного скінченно-часового розтягнення виконувалося за сингулярними числами результуючого оператора

Коефіцієнти цього рівняння безпосередньо було визначено інваріантами локальної матриці переходу:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(J_k), \\ I_2 &= \frac{1}{2} [\text{tr}^2(J_k) - \text{tr}(J_k^2)], \\ I_3 &= \det(J_k). \end{aligned} \quad (20)$$



Для подальшого аналізу характеру коренів у рівнянні (8) виконувалася заміна. Для визначення основних просторово-часових закономірностей було виконано спектральне розкладання:

$$\lambda = u + \frac{I_1}{3}, \quad u^3 + pu + q = 0, \quad p = I_2 - \frac{I_1^2}{3}, \quad q = \frac{I_1 I_2}{3} - I_3 - \frac{2I_1^3}{27}. \quad (21)$$

Після перетворення характеристичного рівняння до форми (10) оцінювання локальної динаміки було продовжено шляхом визначення повного спектра оператора переходу. На відміну від використання одного домінантного кореня, враховувалися всі три спектральні компоненти, оскільки їх взаємне розташування визначало характер деформації локальної області атрактора та подальше розходження прогнозованих станів.

Для цього дискримінант і три спектральні гілки було об'єднано у матричне представлення:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \\ c_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}}, \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_+ \\ c_- \end{bmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}. \quad (22)$$

Отриманий спектр характеризував локальний режим еволюції реконструйованого стану. Проте для хаотичної системи прогнозованість визначалася не властивостями одного переходу, а накопиченим деформуванням траєкторії протягом усього горизонту прогнозу.

Для оцінювання накопиченої зміни норми малого збурення аналізувався вже не спектр окремої матриці J_k , а результуючий оператор $T_{k,h}$, сформований композицією локальних матриць Якобі.

Його сингулярні числа визначають максимальні та мінімальні коефіцієнти підсилення норми збурення за весь інтервал $h\Delta t$. Саме тому сингулярний спектр використовувався для характеристики скінченно-часової деформації, тоді як власні значення J_k зберігали інтерпретацію локальних модальних характеристик:

$$T_{k,h} = J_{k+h-1} J_{k+h-2} \cdots J_{k+1} J_k, \\ T_{k,h} = U_{k,h} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix} V_{k,h}^T, \quad (23) \\ \Lambda_{k,h}^{(i)} = \frac{1}{h\Delta t} \ln \sigma_i(T_{k,h}).$$

Величини $\Lambda_{k,h}^{(i)}$, визначені у (12), у роботі інтерпретувалися як оцінки скінченно-часових показників Ляпунова, реконструйованої динаміки, а не як новий самостійний показник хаотичності.

Їх особливість у межах запропонованого методу полягає у способі формування дотичного оператора: $T_{k,h}$ отримувався не з відомої аналітичної моделі системи, а шляхом композиції матриць Якобі локально ідентифікованого квадратичного відображення. Додатні значення $\Lambda_{k,h}^{(i)}$ відповідали середньому експоненційному розтягненню збурень уздовж відповідних сингулярних напрямів протягом інтервалу $h\Delta t$, від'ємні – їх стисканню. На відміну від асимптотичних показників Ляпунова, ці величини залежать від початкового стану та конкретної тривалості аналізованого інтервалу.

Оскільки нелінійна модель (5) містила квадратичні складові, звичайного перенесення коваріації через матрицю Якобі було недостатньо. Для врахування кривизни оператора еволюції прогноз математичного сподівання та коваріації виконувався із поправкою другого порядку:

$$\hat{z}_{r+1} = F_r(\hat{z}_r) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{tr}(H_{1,r} P_r) \\ \text{tr}(H_{2,r} P_r) \\ \vdots \\ \text{tr}(H_{m,r} P_r) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$P_{r+1} = J_r P_r J_r^T + Q_r + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{tr}(H_{1,r} P_r H_{1,r} P_r) & \cdots & \text{tr}(H_{1,r} P_r H_{m,r} P_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(H_{m,r} P_r H_{1,r} P_r) & \cdots & \text{tr}(H_{m,r} P_r H_{m,r} P_r) \end{bmatrix}.$$

У виразі (13) нелінійне викривлення локального потоку безпосередньо впливало як на центр прогнозованого стану, так і на форму області його невизначеності. У результаті зростання невизначеності визначалося не тільки накопиченням випадкової похибки, а й геометрією хаотичного відображення, що особливо суттєво при збільшенні горизонту прогнозу.

Завершальним етапом методу стало визначення області допустимого прогнозування. Для кожного горизонту формувалася еліпсоїдна область станів, після чого одночасно контролювалися її максимальний розмір та інтенсивність локального експоненційного розходження:

$$\mathcal{E}_{k,h} = \{z : (z - \hat{z}_{k+h|k})^T P_{k+h|k}^{-1} (z - \hat{z}_{k+h|k}) \leq \chi_m^2 (1 - \alpha)\},$$

$$r_{k,h} = \sqrt{\chi_m^2 (1 - \alpha) \lambda_{\max}(P_{k+h|k})}, \quad (25)$$

$$H_k^* = \max_i \Lambda_{k,h}^{(i)} \leq \Lambda_{\text{adm}}(h).$$

У результаті прогнозування завершувалося не фіксованим наперед числом кроків, а визначенням H_k^* , яке залежало від поточного положення траєкторії на атракторі.

Отже, друге обмеження критерію визначає максимально допустиму швидкість експоненційного підсилення початкової невизначеності до рівня Λ_{adm} протягом горизонту $h\Delta t$. Таким чином, значення допустимого горизонту визначається не незалежними емпіричними порогами, а єдиним бюджетом допустимої прогновної похибки. У ділянках із помірним розтягненням фазового простору допустимий горизонт збільшувався, тоді як проходження через локально нестійкі області приводило до його скорочення. Таким чином, розроблений метод поєднав нелінійне прогнозування стану, спектральний аналіз локальної еволюції, оцінювання деформації траєкторій та поширення прогновної невизначеності в єдиній математичній процедурі.

Для перевірки розробленого математичного методу було проведено імітаційне моделювання прогнозування станів хаотичної динамічної системи в середовищі Python із використанням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib. Як тестову динамічну систему було використано систему Лоренца, що характеризується нелінійною взаємодією змінних та високою чутливістю траєкторій до малих змін початкового стану. Моделювання виконувалося для параметрів $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ з часовим кроком $\Delta t = 0,01$.

Загальна тривалість модельованого процесу становила 120 с. Початкова частина траєкторії використовувалася для формування множини відомих переходів між станами, на основі яких оцінювався локальний нелінійний оператор прогнозування. Для кожного поточного стану відбиралося $K = 80$ найближчих станів, після чого формувалася квадратичний базис локальної динаміки та визначалися параметри оператора переходу з регуляризациєю $\lambda = 10^{-6}$. Прогноз здійснювався рекурентно, тобто кожний отриманий стан використовувався як початковий для наступного кроку прогнозування.

Експеримент було спрямовано на перевірку двох властивостей методу. На першому етапі оцінювалася здатність локального нелінійного оператора відтворювати майбутню траєкторію хаотичної системи. На другому етапі досліджувалося накопичення відхилення прогнозованого стану від фактичної траєкторії зі збільшенням горизонту прогнозування. Це дозволило окремо оцінити точність короткострокового прогнозу та момент втрати передбачуваності, який є принциповим для хаотичних динамічних систем.

На рис. 1 наведено весь аттрактор, а саме як прогноз спочатку практично збігається з реальною траєкторією, а потім поступово починає від неї відходити.

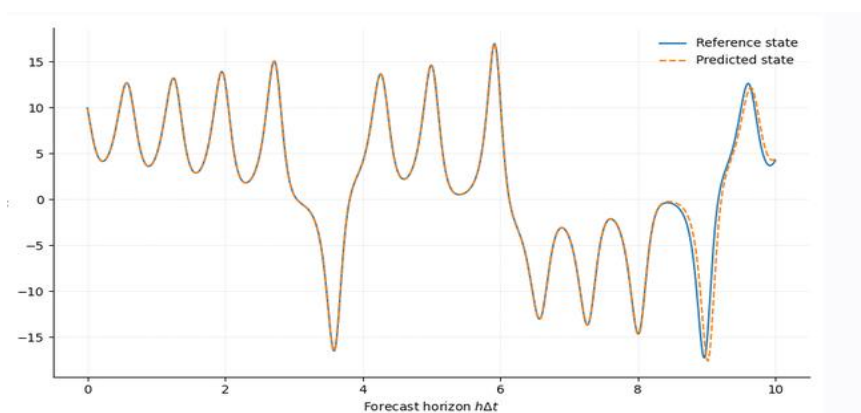


Рис. 1. Фактичний і прогнозований стан хаотичної системи

Отримані результати показали, що на початковій ділянці прогнозована траєкторія практично збігалася з фактичним станом системи. Зі збільшенням горизонту прогнозування спостерігалася поступове розходження траєкторій, що було зумовлено чутливістю хаотичної системи до малих похибок оцінювання стану.

На рис. 2 по осі X – горизонт прогнозування, а по осі Y у логарифмічному масштабі – норма відхилення. На рис. 2 видно експоненційну фазу росту помилки і точку, де вона перетинає допустимий рівень (12)–(14).

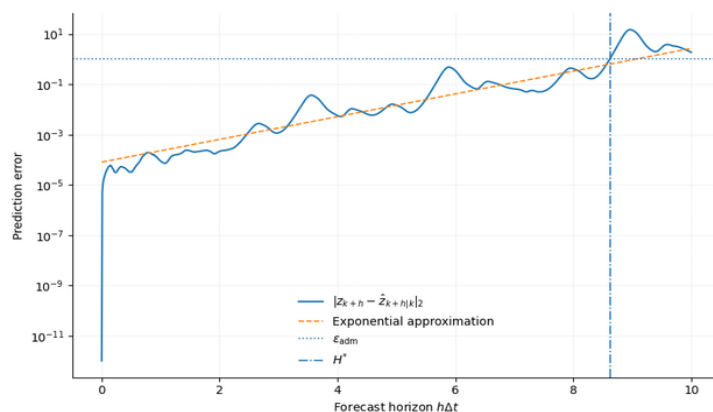


Рис. 2. Наростання прогнозової похибки і межа передбачуваності

Залежність похибки від горизонту прогнозування мала виражений зростаючий характер. Перетин кривої похибки з допустимим рівнем визначав граничний горизонт H^* , після якого прогноз втрачав практичну інформативність.

Отриманий результат підтвердив доцільність адаптивного обмеження горизонту прогнозування відповідно до локальної нестійкості хаотичної динаміки. Для додаткової кількісної перевірки запропонований метод порівнювався з локальним лінійним прогнозуванням за однакових параметрів моделювання. У базовому варіанті використовувалася лише лінійна складова оператора (5), тобто $B_k=0$, тоді як запропонований метод враховував також квадратичні взаємодії фазових координат.

Порівняння показало меншу прогнозну похибку для запропонованого методу та більш тривале збереження траєкторії в межах допустимого відхилення. Визначений за критерієм (14) горизонт H_k^* відповідав області, після виходу з якої спостерігалася інтенсивне зростання фактичної похибки, що підтверджує можливість використання критерію для адаптивного визначення межі практичної передбачуваності.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати показали, що розроблений математичний метод забезпечує формування короткострокового прогнозу станів хаотичної динамічної системи з урахуванням локальних властивостей її траєкторії.

Використання нелінійного оператора переходу дозволило відтворювати динаміку системи в межах області локальної передбачуваності, тоді як спектральний аналіз та оцінювання накопичення прогнозової похибки дали змогу визначати момент істотного розходження фактичної та прогнозованої траєкторій.

Принципова відмінність запропонованого методу від традиційного локального прогнозування полягає в тому, що локальна модель використовується не лише як апроксиматор переходу між станами. Її диференціальні властивості формують послідовність дотичних операторів, композиція яких характеризує накопичене скінченно-часове розтягнення, а нелінійна структура оператора одночасно використовується для поширення прогнозової невизначеності.

6 ВИСНОВКИ

У дослідженні розроблено математичний метод прогнозування станів хаотичних динамічних систем, у якому локально ідентифікований квадратичний оператор використовується як спільна основа для прогнозування стану, формування дотичної динаміки та оцінювання накопичення прогнозової невизначеності.

На відміну від окремого застосування локальної апроксимації або спектрального аналізу, запропонована конструкція поєднує композицію матриць Якобі, оцінювання скінченно-часових показників Ляпунова за сингулярним спектром результуючого оператора та поширення коваріації другого порядку з адаптивним визначенням допустимого горизонту прогнозування.

Порівняльне моделювання з локальним лінійним прогнозуванням підтвердило доцільність урахування квадратичних взаємодій між фазовими координатами та показало можливість кількісного визначення межі практичної передбачуваності. Узгодження розрахованого за критерієм (14) горизонту H_k^* з емпіричним моментом перевищення допустимої похибки підтверджує, що запропонований критерій може використовуватися для адаптивного припинення прогнозування в локально нестійких областях хаотичної траєкторії. Отримані результати підтвердили доцільність адаптивного визначення горизонту прогнозування для хаотичних динамічних систем.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори заявляють про відсутність фінансових та нефінансових конфліктів інтересів, які могли б вплинути на проведення дослідження, інтерпретацію отриманих результатів або підготовку матеріалів статті.

Література

1. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
2. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyu, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>
3. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
4. Al-Ammouri, A., Lebid, I., Dekhtiar, M., Lebid, Ye., & Al-Ammori, H. (2022). Development of a mathematical model of reliable structures of information-control systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/9(119), 68–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265953>
5. Gnatyuk, S., Kinzeryavyu, V., Polishchuk, Y., Nechyporuk, O., & Horbakha, B., Аналіз методів забезпечення конфіденційності даних, які передаються з БПЛА. Електронне фахове наукове видання "Кібербезпека: освіта, наука, техніка; 1(17), 167-186. <https://doi.org/10.28925/26634023.2022.17.167186>.
6. T. Dong and T. Huang. (2020). Neural Cryptography Based on Complex-Valued Neural Network. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Vol. 31, No. 11, 4999-5004.
7. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
8. N. Basta, M. Ikram, M. Kâafar, A. Walker, Towards a zero-trust micro-segmentation network security strategy: An evaluation framework, in: NOMS 2022 - IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium, 2021, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1109/NOMS54207.2022.9789888>.

9. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," *Expert Syst. Appl.* 193, 116429, 2022
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
10. Ластівка О.І., Нечипорук О.П. Математична модель адаптивного управління потоками даних у каналах зв'язку безпілотних літальних апаратів. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2026. 1. С. 36–42. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.26.1.4>
11. Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапушенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. № 1. С. 95–107. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.
12. Нечипорук, О. П., Подельський, С. В. (2026). Математична модель функціонування складної інформаційної системи на основі багатовимірних часових рядів. *Електроніка та системи управління*, 2(88), 61–68. <https://doi.org/10.18372/1990-5548.88.20967>.

References

1. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
2. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyy, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>
3. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
4. Al-Ammouri, A., Lebid, I., Dekhtiar, M., Lebid, Ye., & Al-Ammori, H. (2022). Development of a mathematical model of reliable structures of information-control systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/9(119), 68–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265953>
5. Gnatyuk, S., Kinzeryavyy, V., Polishchuk, Y., Nechiporuk, O., & Horbakha, B., Analysis of methods for ensuring the confidentiality of data transmitted from UAVs. *Electronic professional scientific journal 'Cybersecurity: Education, Science, Technology'*; 1(17), 167–186. <https://doi.org/10.28925/26634023.2022.17.167186>.
6. T. Dong and T. Huang. (2020). Neural Cryptography Based on Complex-Valued Neural Network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Vol. 31, No. 11, 4999-5004.
7. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
8. N. Basta, M. Ikram, M. Kâafar, A. Walker, Towards a zero-trust micro-segmentation network security strategy: An evaluation framework, in: *NOMS 2022 - IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium*, 2021, pp. 1–7. doi:10.1109/NOMS54207.2022.9789888.
9. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," *Expert Syst. Appl.* 193, 116429, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
10. Lastivka O., Nechiporuk O. A Mathematical Model for Adaptive Data Flow Control in Communication Channels for Unmanned Aerial Vehicles. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2026. 1. P. 36–42. (in Ukrainian) <https://doi.org/10.34229/2707-451X.26.1.4>

11. Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 95–107.
<https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.
12. Nechyporuk, O., Podelskyi, S. (2026). Information System Functioning Based on Multidimensional Time Series. Electronics and Control Systems, 2(88), 61–68.
<https://doi.org/10.18372/1990-5548.88.20967>

Нечипорук Олена Петрівна

д.т.н., професор

olena.nechyporuk@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0001-8203-7998](https://orcid.org/0000-0001-8203-7998)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Апенко Наталія Вікторівна

к.т.н., доцент

natalia.apenko@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0001-6891-0869](https://orcid.org/0000-0001-6891-0869)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Бузун Олександр Геннадійович

Молодший науковий співробітник

sashabuzun2001@gmail.com,

[ORCID: 0009-0009-7828-2734](https://orcid.org/0009-0009-7828-2734)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Тупота Євгеній Вікторович

Старший викладач

yevhenii.tupota@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0009-0006-7278-984X](https://orcid.org/0009-0006-7278-984X)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Стаття надійшла до редакції 13.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Нечипорук О.П., Апенко Н.В., Бузун О.Г., Тупота Є.Г. Розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 38–49.

For references:

O. Nechyporuk, N. Apenko, O. Buzun, Y. Tupota (2026). Development of a mathematical method for predicting the states of chaotic dynamical systems. Mechanics and mathematical methods. VIII (2). 38–49.

[Розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем](#) © 2026 by [Нечипорук О.П., Апенко О.В., Бузун О.Г., Тупота Є.В.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)