

УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ СТАБІЛІЗОВАНОГО ОБЕРТАННЯМ ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ

Лещенко Д.Д.¹, Козаченко Т.О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Проблема руху твердого тіла відносно нерухомої точки є однією з класичних задач механіки. Інтерес до задач динаміки твердого тіла посилюється в другій половині XX сторіччя в зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки. Дослідження руху супутників навколо центра мас важливо для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху і для розв'язування практичних задач космонавтики. В статті проведено комплексне теоретичне та чисельне дослідження актуальної задачі сучасної нелінійної механіки – еволюції руху відносно центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом за умов стабілізації власним обертанням. На основі застосування сучасного апарату асимптотичних методів нелінійної механіки, зокрема методу усереднення Боголюбова–Митропольського, вихідну систему диференціальних рівнянь руху зведено до стандартної автономної форми. В роботі проведена процедура усереднення та одержані усереднені рівняння, які простіше початкових, також здійснено аналіз алгебраїчної структури збурюючих моментів та обґрунтовано нехтування членами вищих порядків малості, що дозволило суттєво спростити математичну модель без втрати точності розв'язку на великих інтервалах часу. Проведено канонічні заміни змінних із переходом до повільно змінюваних амплітудно-фазових параметрів та квадратичних змінних, що дозволило ефективно розділити часові масштаби. Розв'язано задачу Коші для отриманої усередненої системи двох рівнянь першого порядку при заданих фізико-механічних параметрах конструкції. За допомогою чисельного інтегрування побудовано та детально проаналізовано траєкторії та графічні залежності амплітудної змінної та осової складової вектора кутової швидкості.

Досліджено еволюцію руху під дією малих моментів. Отримані результати є фундаментальним розвитком класичних задач динаміки твердого тіла з внутрішніми рухомими масами, в'язкопружними елементами або порожнинами, заповненими рідиною великої в'язкості. Практична цінність роботи полягає у можливості безпосереднього використання розроблених асимптотичних моделей для проектування й розрахунку високоефективних систем орієнтації, стабілізації та управління космічними апаратами, а також для оцінки динамічного впливу внутрішніх рухомих елементів і членів екіпажу на стійкість обертальних режимів польоту.

Ключові слова: динаміка твердого тіла, рухома маса, метод усереднення, стабілізація обертанням.

PERTURBED MOTIONS OF SPINSTABILIZED RIGID BODY WITH A MOVING MASS

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The problem of a rigid body motion about a fixed point is one of the classical problems of mechanics. The interest in the problem of the rigid body dynamics has increased in the second half of the XX century in connection with the development of rocket and space technologies. The study of the motion of a satellite about center of mass is important for creating systems of orientation control, stabilization of motion and for solving the practical problems of astronautics. This paper presents a comprehensive theoretical and numerical study of an urgent problem in modern non-linear mechanics: the motion evolution about a center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a viscoelastic element under rotation stabilization conditions. Based on modern asymptotic



methods of non-linear mechanics, specifically the Bogoliubov–Mitropolsky averaging method, the initial system of differential equations of motion is reduced to a standard autonomous form. The averaging procedure was carried out to derive averaged equations that are simpler than the original ones. An analysis of the algebraic structure of perturbation torques was performed, justifying the omission of higher-order terms of smallness, which significantly simplified the mathematical model without sacrificing solution accuracy over long time intervals. Canonical variable transformations were applied to transition to slowly varying amplitude-phase parameters and quadratic variables, effectively separating the time scales. The Cauchy problem was solved for the resulting averaged system of two first-order equations under given physical and mechanical parameters of the structure. Through numerical integration, trajectories and graphical dependencies of the amplitude variable and the axial component of the angular velocity vector were constructed and thoroughly analyzed. The motion evolution under small torques was investigated. The obtained results represent a fundamental development of classical problems of rigid body dynamics with internal moving masses, viscoelastic elements, or cavities filled with a high-viscosity fluid. The practical value of this work lies in the direct applicability of the developed asymptotic models for designing and calculating highly efficient orientation, stabilization, and control systems for spacecraft, as well as for assessing the dynamic impact of internal moving elements and crew members on the stability of rotational flight regimes.

Keywords: rigid body dynamics, movable mass, spinstabilized rotation.

1 ВСТУП

Дослідження динаміки обертального руху твердого тіла відносно центра мас за наявності внутрішніх рухомих елементів та малих дисипативних збурень є однією з класичних і водночас актуальних задач нелінійної механіки. Зокрема, космічний апарат у своєму русі відносно центра мас зазнає впливу моментів сил різної фізичної природи. На нього діють гравітаційні, аеродинамічні, електромагнітні моменти, моменти сил світлового тиску, а також моменти, зумовлені рухом внутрішніх мас. Ці рухи обумовлені, наприклад, наявністю роторів, гіроскопів в тілі, а також переміщеннями екіпажу. Наявність зазначених внутрішніх і зовнішніх факторів суттєво ускладнює динамічну картину руху, перетворюючи її на багатовимірну нелінійну систему. У зв'язку з цим, розробка математичних моделей та аналіз еволюції обертальних режимів за наявності збурень і внутрішніх рухомих елементів є актуальною науково-прикладною задачею сучасної механіки, спрямованою на підвищення надійності систем орієнтації, стабілізації та управління польотом.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість наукових праць присвячена вивченню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами, вичерпний огляд яких представлено в роботах [1, 2]. Зокрема, у книзі [3] детально вивчено вплив внутрішньої пружності та дисипації на динаміку руху супутника відносно центра мас. У контексті космічних польотів відносні переміщення рухомих мас часто застосовуються як ефективний інструмент демпфування хаотичного обертання та згашення небажаних коливань апарата [4]. У цьому напрямі розглядалися фундаментальні проблеми стійкості, резонансних явищ, а також питання орієнтації та стабілізації рухів [4, 5]. Окремі аспекти руху твердого тіла з приєднаною точковою масою досліджено в праці [6].

У роботі [7] проаналізовано сумісний вплив порожнини з рідиною великої в'язкості та рухомої маси, з'єднаної з корпусом пружним зв'язком із в'язким тертям або квадратичною дисипацією, на еволюцію руху динамічно симетричного тіла.

Низка досліджень висвітлює проблеми динаміки космічних апаратів (КА), стабілізованих обертанням за допомогою реактивного двигуна [3, 8–10]. У цих моделях припускається, що напрямок векторної тяги збігається з головною віссю інерції КА, а двигун забезпечує керування його орбітальним рухом.

Питання руху близького до динамічно сферичного твердого тіла під дією малих збурюючих моментів висвітлено в працях [2, 11–14]. У роботах [13, 14] отримали подальший розвиток результати дослідження [11] стосовно поведінки твердого тіла під дією гіростатичного моменту.

У даній статті розглядається еволюція руху близького до динамічно сферичного твердого тіла відносно центра інерції за умов його стабілізації власним обертанням. До точки, розташованої на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані), прикріплено рухому точкову масу, з'єднану з корпусом в'язкопружним демпфером [2].

Практичний інтерес до окресленої проблематики зумовлений потребами ракетно-космічної галузі, зокрема необхідністю розробки систем орієнтації, стабілізації та управління космічними апаратами, а також урахуванням динамічного впливу внутрішніх елементів конструкції й екіпажу.

Наявність в'язкопружних елементів та рухомих мас суттєво ускладнює математичний опис системи, перетворюючи її на багатовимірну нелінійну систему диференціальних рівнянь. Складність прямого аналітичного інтегрування таких рівнянь вимагає застосування сучасних асимптотичних методів, визначення стаціонарних режимів руху на великих часових інтервалах.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю даної роботи є аналітичне розроблення асимптотичної математичної моделі еволюції обертального руху майже динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружно приєднаною точковою масою, стабілізованого обертанням, а також дослідження впливу дисипативно-частотних параметрів на усталені асимптотичні стани системи.

Для досягнення поставленої цілі сформовано комплекс взаємопов'язаних наукових завдань: здійснити аналітичні перетворення вихідних рівнянь та застосувати метод усереднення Боголюбова-Митропольського для переходу до стандартної форми відносно повільних змінних; увести квадратичні заміни для спрощення алгебраїчної структури усередненої системи та розділення часових масштабів руху; провести чисельне інтегрування (розв'язати задачу Коші) для двох дисипативно-частотних режимів системи; обґрунтувати інваріантність динаміки амплітудної змінної відносно змін параметрів та оцінити чутливість осової складової кутової швидкості.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо просторовий рух динамічно симетричного тіла відносно центра інерції. До точки на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані) прикріплена рухома точкова маса, яка з'єднана в'язкопружним демпфером з корпусом [2].

В цьому випадку наближена система рівнянь руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [2, 8, 9, 11]:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} qr (Q_1 p^2 + K_1 q^2 + L_1 r^2) + \\ &\quad + \lambda \Omega^{-4} p [q^2 (M_1 p^2 + N_1 q^2 + R_1 r^2) + r^2 (S_1 p^2 + T_1 r^2)] \} - \varepsilon^2 S p, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} pr (Q_2 q^2 + K_2 p^2 + L_2 r^2) + \\ &\quad + \lambda \Omega^{-4} q [r^2 (M_2 q^2 + N_2 r^2 + R_2 p^2) + p^2 (S_2 q^2 + T_2 p^2)] \} - \varepsilon^2 S q, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} r^3 (A + C - B)(B + C - A) A^{-1} B^{-1} \times \\ &\quad \times [(A - C) B^{-1} p^2 + (B - C) A^{-1} q^2]. \end{aligned} \quad (1)$$

Головні моменти інерції системи позначено як A , B та C , тоді як p, q, r є проекціями вектора абсолютної кутової швидкості ω на головні осі інерції, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малий параметр. Розглядається рух твердого тіла з точковою масою m , приєднаною до O_1 за допомогою пружної в'язі з жорсткістю c та коефіцієнтом в'язкого тертя δ , що має три ступені вільностей відносно тіла, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до місця її кріплення. Константи $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань та інтенсивність їх згасання відповідно.

У загальному випадку знайти розв'язок цієї задачі неможливо. Однак, якщо коефіцієнти Ω , λ такі, що вільний рух точки m затухає значно швидше, ніж час, необхідний для здійснення одного оберту твердого тіла, то відносні коливання точки m , викликані цим рухом, є малими. Можна припустити, що одиницю вимірювання часу обрано порядку періоду обертання тіла, так що кутова швидкість $\omega \sim 1$, і тоді маємо умови вигляду:

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg 1. \quad (2)$$

Умова (2) створює можливість застосування асимптотичного метода усереднення [15]. Крім того, виконання нерівності (2) дає підстави нехтувати вільними коливаннями точкової маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання. Натомість основна увага приділяється вимушеним квазістаціонарним рухам, які спричинені обертанням тіла.

Припустимо, що $\Omega^2 \sim \varepsilon^2$, $\lambda\Omega^4 \sim \varepsilon^3$.

Коефіцієнти $Q_1, K_1, L_1, N_1, R_1, S_1, T_1, Q_2, K_2, L_2, N_2, R_2, S_2, T_2$, які входять у праві частини перших двох рівнянь (1), є специфічними виразами, які складаються з A, B та C . Наприклад:

$$Q_1 = -1 - 5\frac{A-C}{B} - 6\frac{C-B}{A} - 3\frac{B-A}{C} + 7\frac{(A-C)(B-A)}{BC} + 4\frac{(B-A)(C-B)(A-C)}{ABC}. \quad (3)$$

Решту виразів із рівняння (1) у цій роботі не наведено через їхню складність.

Розглядається рух твердого тіла, стабілізованого обертанням за допомогою двигуна. В рівняннях (1) S додатна конструктивна стала, яка характеризує двигун [8, 9].

У дослідженні розглядається випадок майже динамічно сферичного твердого тіла, в якому головні моменти інерції незбуреної системи є приблизно рівними:

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0. \quad (4)$$

Після застосування серії перетворень до системи (1) із урахуванням співвідношень (2), (3) та переходу до повільного часу $\tau = \varepsilon t$ отримуємо збурену систему Ейлера (членами порядку ε^4 та вище нехтуємо):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_{1p}(p, q, r), & p(0) &= p_0, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{A'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) pr + \varepsilon f_{1q}(p, q, r), & q(0) &= q_0, \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{A' - B'}{J_0} pq + \varepsilon f_{1r}(p, q, r), & r(0) &= r_0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varepsilon f_{1(p,q,r)}(p, q, r)$ – функції, що містять доданки від першого до третього порядків малості за малим параметром ε .

Дослідження динаміки складних механічних та фізичних систем із малими збуреннями часто потребує застосування асимптотичних методів нелінійної механіки. Ефективним інструментом аналізу таких систем є метод усереднення Кривої, Боголюбова–Митропольського [15].

Розглядається динамічна система, поведінка якої описується за допомогою повільних змінних p, q, r . Для побудови динаміки руху спочатку розглядається незбурена система, яка відповідає випадку нульового малого параметра ($\varepsilon = 0$). Загальний породжувальний розв'язок системи застосовуємо як перетворення до змінних a, r :

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a \omega \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r, \quad (6)$$

де введено такі позначення для амплітуди

$$a = \sqrt{p_0^2 + \left(\frac{1}{w} \frac{dp_0}{d\tau} \right)^2},$$

фази $\varphi = w\tau + \varphi_0$, та частоти $w = r\sqrt{A'B'}/J_0$, $A'B' > 0$. Початкова фаза $\cos \varphi_0 = p_0/a$, $\sin \varphi_0 = -q_0\sqrt{B'/A'}/a$.

Диференціюванням перетворень (5) за часом τ із урахуванням (6) та подальшим застосуванням процедури усереднення за швидкою фазою φ , вихідна система зводиться до стандартної форми усереднених рівнянь:

$$\frac{da}{d\tau} = \beta\gamma a(\alpha a^4 + \eta a^2 r^2 - r^4) - a\mu r^2, \quad (7)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \beta A' a^2 r^3.$$

Безрозмірні коефіцієнти системи виражаються через параметри задачі за формулами:

$$\beta = \frac{-\rho^2 m \lambda}{J_0^2 \Omega^4}, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A'}{B'} \right), \quad \gamma = \frac{(A' - B')}{2}, \quad \chi = \frac{\xi P_0}{\nu J_0^3}, \quad \alpha = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{A'^2}{B'^2} \right), \quad \mu = \frac{\varepsilon S}{J_0}.$$

З метою подальшого спрощення аналізу фазового простору і чисельного інтегрування вводимо заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2$, та отримуємо трансформовану систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{d\tau} = 2\beta\gamma x(\alpha x^2 + \eta xy - y^2) - 2\mu x, \quad (8)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\beta A' xy^2.$$

Для вивчення динамічних властивостей отриманої системи (8) було проведено серію чисельних експериментів. Чисельне інтегрування здійснювалося при фіксованих початкових умовах та базових параметрах:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad \rho = 1; \quad m = 1; \quad \varepsilon = 0.1; \quad C = 1; \quad S = 0.15; \quad A' = 5.1; \quad B' = 5.$$

Було досліджено два типи режимів системи: 1) $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$ (рис. 1); 2) $\lambda = 9$, $\Omega = 9$ (рис. 2).

У першому випадку (рис. 1) на інтервалі часу $\tau \in [0; 300]$ спостерігається затухання квадрата амплітуди, яка монотонно прямує до нульового значення ($x \rightarrow 0$). Змінна $y(\tau)$ демонструє плавне зменшення від початкового значення $y(0) = 1$ і виходить на стаціонарне асимптотичне значення $y \approx 0.75$.

У другому випадку (рис. 2) зменшення параметрів λ та Ω призводить до інтенсифікації процесів. На інтервалі $\tau \in [0; 300]$ швидкість затухання $x(\tau)$ така ж як і в першому випадку, а змінна $y(\tau)$ стабілізується на нижчому асимптотичному рівні $y \approx 0.68$.

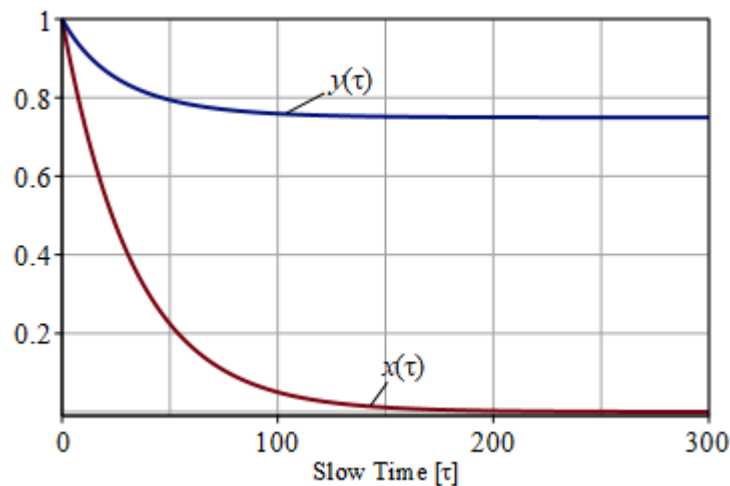


Рис. 1. Графіки змінних y та x у випадку $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$

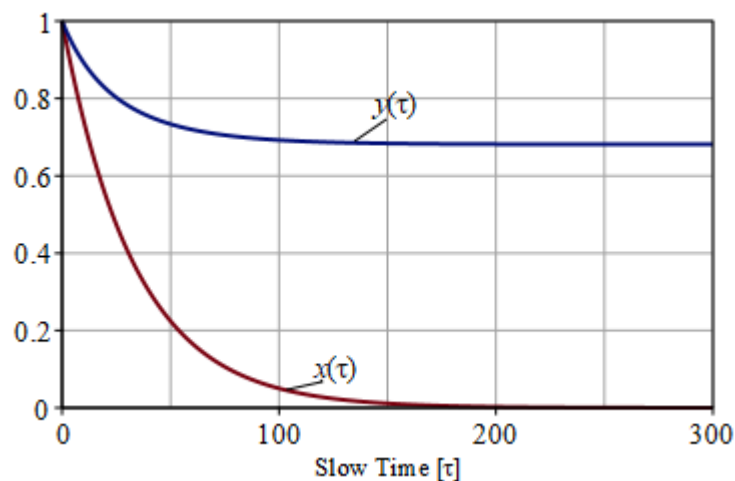


Рис. 2. Графіки змінних y та x у випадку $\lambda = 9$, $\Omega = 9$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Порівняльний аналіз чисельних розв'язків для двох наборів параметрів $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$ та $\lambda = 9$, $\Omega = 9$ показав, що графіки залежності $x(\tau)$ практично повністю співпадають. Це пояснюється тим, що параметр $\beta = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} J_0^{-2}$ в обох випадках набуває вкрай малих значень ($|\beta| \sim 10^{-3}$), через що нелінійний доданок $2\beta\gamma x(\alpha x^2 + \eta x y - y^2)$ у першому рівнянні системи (8) є малим порівняно з лінійним членом $-2\mu x$. Таким чином, динаміка амплітудного параметра $x(\tau)$ визначається майже виключно коефіцієнтом демпфування $\mu = \varepsilon S J_0^{-1}$ і носить універсальний експоненціальний характер $x(\tau) \approx e^{-2\mu\tau}$, інваріантний до змін параметрів λ та Ω .

На відміну від $x(\tau)$, динаміка другої змінної $y(\tau)$ (компоненти r^2) виявляє високу чутливість до зміни параметрів λ та Ω . У другому випадку за рахунок зменшення частотного параметра Ω з 10 до 9 модуль коефіцієнта зростає приблизно на 40% (з 0.00098 до 0.00137). Це призводить до зростання абсолютної швидкості зміни $y(\tau)$ на початковому етапі руху, роблячи спад у другому випадку більш стрімким.

6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження стабілізованого обертання за допомогою двигуна твердого тіла з рухомою масою, зв'язаною з тілом пружною в'яззю, одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після переходу до усередненої системи знайдено чисельний розв'язок задачі.

Встановлено розділення часових масштабів у системі: квадрат амплітудної складової затухає за швидким експоненціальним законом під дією лінійного демпфування, тоді як змінна квадрата екваторіальної складової плавно еволюціонує до скінченного асимптотичного значення. Частота коливань виступає ефективним параметром керування кінцевим стаціонарним станом осьової складової вектора кутової швидкості. Зменшення частотного параметра прискорює перехідні релаксаційні процеси в системі та зміщує її асимптотичний усталений рівень у бік менших значень.

Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, які можуть бути використаними при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас, а також при оцінці динамічного впливу переміщень членів екіпажу відносно корпусу апарата.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*, 2020. Volume 176. P. 464–475.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.019>
2. Leshchenko D., Kozachenko T. Perturbed motions of a gyrostat with a moving mass subjected to constant body-fixed torques. *Archive of Applied Mechanics*. 2026. Volume 96, article 111.
<https://doi.org/10.1007/s00419-026-03098-1>
3. Thomson W. T. *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower, 1986, 317p.
4. Jansseus F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015. Volume 38. Issue 4. P. 761–771.
5. Miller A.I., Gray G.L., Mazzoleni A.P. Non-linear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping and moving submasses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2001. Volume 24. Issue 3. 605–615.
6. Christov O. Non-integrability of a system from rigid body dynamics. *Annual of Sofia University St. Kliment Ohridski. Faculty of Mathematics and Informatics*. 2022. Volume 109. 57–69.
<https://doi.org/10.60063/gsu.fmi.109.57-69>
7. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*, 1992. Volume 28. Issue 8. P. 524–528.
8. Magnus K. Kreisel. *Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.

9. Pivovarov M. L., Ferreira L. O., Lopes R.V.F. Rigid body rotation evolution due to a disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechanica*. 1999. Volume 133. 239–246. <https://doi.org/10.1007/BF01179020>
10. Van der Ha J. C., Janssens F. L. Jet-Damping and Misalignment Effects During Solid-Rocket-Motor Burn. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005. Volume 28. No 3. 412-420. <https://doi.org/10.2514/1.3852>
11. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. *Праці ІІММ НАН України*, 2024. Том 38. № 1. С. 44-53.
12. Leshchenko D., Rachinskaya A., Kozachenko T., Paly K. Evolution of Rotational Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass. In: Tonkonogiy, V. et al (eds). *Interpartner 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2026. 174-184. https://doi.org/10.1007/978-3-032-14926-8_15
13. Farag A.M., Amer T.S., Abady I.M. Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2022. Volume 10. 1637–1645. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>
14. He J.H., Amer T.S., Amer W.S., et al. Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2023. Volume 33. Issue 8. 2800–2814. <https://doi.org/10.1108/HFF-01-2023-0018>
15. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440 с.

References

1. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*. 176. 464–475. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.019>
2. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2026). Perturbed motions of a gyrostat with a moving mass subjected to constant body-fixed torques. *Archive of Applied Mechanics*. 96. 111. <https://doi.org/10.1007/s00419-026-03098-1>
3. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
4. Janssens, F. L. and Van der Ha, J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 38(4). 761-771. <https://doi.org/10.2514/1.G000123>
5. Miller, A.I., Gray, G.L., Mazzoleni, A.P. (2001). Non-linear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping and moving submasses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 24 (3), 605-615.
6. Christov, O. (2022). Non-integrability of a system from rigid body dynamics. *Annual of Sofia University St. Kliment Ohridski. Faculty of Mathematics and Informatics*. 109. 57-69. <https://doi.org/10.60063/gsu.fmi.109.57-69>
7. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28 (8). 524–528.
8. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
9. Pivovarov, M.L., Ferreira, L.O., Lopes, R.V.F. (1999). Rigid body rotation evolution due to a disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechanica*. 133. 239–246. <https://doi.org/10.1007/BF01179020>
10. Van der Ha, J. C., Janssens, F. L. (2005). Jet-Damping and Misalignment Effects During Solid-Rocket-Motor Burn. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 28 (3). 412-420. <https://doi.org/10.2514/1.3852>
11. Leshchenko, D.D., Rachinskaya, A.I. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 38 (1). 44-53. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-5> [in Ukraine]
12. Leshchenko, D., Rachinskaya, A., Kozachenko, T., Paly, K. (2026). Evolution of Rotational Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass. In: Tonkonogiy, V. et

- al (eds). Interpartner 2025. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 174-184. https://doi.org/10.1007/978-3-032-14926-8_15
13. Farag, A.M., Amer, T.S., Abady, I.M. (2022). Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 10. 1637–1645. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>
14. He, J.H., Amer, T.S., Amer, W.S., et al. (2023). Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 33(8). 2800–2814. <https://doi.org/10.1108/HFF-01-2023-0018>
15. Mitropolskiy, Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka.

Лешенко Дмитро Давидович

д.ф.-м.н., професор

leshchenko_d@ukr.net,

[ORCID: 0000-0003-2436-221X](https://orcid.org/0000-0003-2436-221X)

Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

Козаченко Тетяна Олександрівна

к.ф.-м.н., доцент

kushpil.t.a@gmail.com

[ORCID: 0000-0001-9034-3776](https://orcid.org/0000-0001-9034-3776)

Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

Стаття надійшла до редакції 24.06.2026

Стаття прийнята до друку 24.08.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Лешенко Д.Д., Козаченко Т.О. Збурені рухи стабілізованого обертанням твердого тіла з рухомою масою. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. №2. С. 77–86.

For references:

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2026). Perturbed motions of spinstabilized rigid body with a moving mass. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 77–86.

Збурені рухи стабілізованого обертанням твердого тіла з рухомою масою © 2026 by Лешенко Д.Д., Козаченко Т.О. is licensed under [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)