

УДК 517.944

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ТРИКУТНОЮ МАТРИЦЕЮ ПОТОКУ

Казмерчук А.І.¹

¹*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника*

Анотація: У теорії рівнянь з частинними похідними особливе місце виділене для систем квазілінійних рівнянь першого порядку. З огляду на важливі застосування в гідромеханіці і газовій динаміці, такі системи отримали пристойну увагу і з врахуванням прикладних аспектів. Зауважимо, що у теорії систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку важливим є питання розв'язності і обґрунтування наближених методів розв'язання задачі Коші. Слід врахувати специфіку квазілінійних рівнянь першого порядку і, особливо, систем таких рівнянь, за якою в нелокальній задачі Коші навіть при гладких початкових функціях за скінченний час можуть виникати розриви. З огляду на це, доцільно розглядати ширші функціональні класи, ніж класи гладких функцій. Такі підходи на основі побудови узагальнених розв'язків у випадку конкретних систем квазілінійних рівнянь першого порядку дозволяють коректним чином будувати теорію розв'язності. Саме цьому і присвячене дослідження, яке висвітлюється в даній роботі.

У випадку діагональної матриці потоку наявні більш ширші дослідження, які включають і розв'язність і обґрунтування різноманітних наближених методів, таких як метод в'язкості, скінченно-різницеви методи за схемою Лакса, метод покрового згладжування тощо. У даній роботі для систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з трикутною матрицею потоку введено поняття узагальненого розв'язку задачі Коші. Введено умови, які забезпечують виконання принципу максимуму. Також запропоновано аналіз наближеного методу з допомогою параболічної системи диференціальних рівнянь другого порядку і доведено збіжність наближеного методу. Знайдено класи початкових функцій, з якими задача Коші має єдиний розв'язок. Показано, як отримати такий розв'язок з допомогою методу в'язкості. Отримані результати в певному сенсі узагальнюють і доповнюють результати для систем квазілінійних рівнянь першого порядку з діагональною матрицею потоку.

Розглянутий в роботі підхід також дозволяє зрозуміти, як працюють наближені методи, які є аналогом системи Нав'є-Стокса для системи рівнянь гідромеханіки.

Ключові слова: системи квазілінійних рівнянь, узагальнений розв'язок, класичний розв'язок, задача Коші, наближені методи.

SOLVABILITY OF A SYSTEM OF FIRST-ORDER QUASILINEAR EQUATIONS WITH A TRIANGULAR FLUX MATRIX

A. Kazmerchuk¹

¹*Vasyl Stefanyk Carpathian National University*

Abstract: In the theory of partial differential equations, a special place is reserved for systems of first-order quasilinear equations. Given their significant applications in fluid mechanics and gas dynamics, such systems have received considerable attention, including from the perspective of applied aspects. It should be noted that within the theory of systems of first-order quasilinear partial differential equations, the issues of solvability and the justification of approximate methods for solving the Cauchy problem are of particular importance. It is necessary to take into account the specific nature of first-order quasilinear equations and, in particular, systems of such equations whereby discontinuities can arise within a finite time in a nonlocal Cauchy problem, even given smooth initial functions. In light of this, it is appropriate to consider function classes broader than those of smooth functions. Approaches based on the construction of generalized solutions for specific systems of first-



order quasilinear equations make it possible to rigorously formulate a theory of solvability. The research presented in this paper is devoted precisely to this topic.

Extensive research exists regarding the case of a diagonal flux matrix, covering both solvability and the justification of various approximation methods-such as the viscosity method, finite-difference schemes (e.g., the Lax scheme), the step-by-step smoothing method, and others. In this paper, the concept of a generalized solution to the Cauchy problem is introduced for systems of first-order quasilinear partial differential equations with a triangular flux matrix. Conditions ensuring the validity of the maximum principle are also established. An analysis of an approximate method using a second-order parabolic system of differential equations is also presented, and the convergence of the method is proved. Classes of initial functions for which the Cauchy problem has a unique solution are identified, and it is shown how such a solution can be obtained using the viscosity method. In a certain sense, the results obtained generalize and complement those established for systems of first-order quasilinear equations with a diagonal flux matrix.

The approach considered in the paper also provides insight into the operation of approximate methods that serve as analogues to the Navier-Stokes system for systems of equations in fluid mechanics.

Keywords: systems of quasilinear equations, generalized solution, classical solution, Cauchy problem, approximate methods.

1 ВСТУП

При розв'язуванні диференціальних рівнянь класичний підхід вимагає існування і навіть неперервності похідних, які входять у рівняння. У деяких моделях природничих наук такі диференціальні рівняння є нульовим наближенням, і в такому випадку можлива наявність розривних розв'язків. Математична модель при цьому припускала утворення розривів навіть за умови гладкості початкових даних в задачі Коші. Відтак виникає потреба у новому трактуванні розв'язків диференціальних рівнянь.

Так виник підхід з введенням узагальнених розв'язків на основі виконання інтегральних тотожностей. З 50-х років минулого століття такий підхід науковці застосували до квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Основною проблемою при цьому стала неєдиність введеного узагальненого розв'язку. Залишається невирішеною така проблема і для систем квазілінійних рівнянь першого порядку досить широкого класу, які здебільшого мають конкретні застосування в гідромеханіці та газовій динаміці. Дослідженню класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких вдається побудувати теорію розв'язності, якраз і присвячена ця робота.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

З 30-х років минулого століття від праць Шварца Л. і Соболева С.Л. бере початок сучасна теорія рівнянь з частинними похідними на основі підходу з використанням узагальнених функцій. У роботах дослідників [1-3] було сформовано підхід введення узагальненого розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку у випадку однієї просторової змінної, а далі і у випадку багатьох просторових змінних. У роботах [2-3] було побудовано теорію розв'язності задачі Коші для одного квазілінійного рівняння першого порядку. При цьому застосовувалися підходи з апроксимаціями на основі параболічних рівнянь з використанням уже отриманих результатів, які знайшли відображення в працях [4,5].

Для систем квазілінійних рівнянь першого порядку з огляду на теорію розв'язності і обґрунтування наближених методів певні результати було отримано в працях [6-11]. Для систем квазілінійних рівнянь з діагональною матрицею потоку отримано результати існування і єдиності розв'язку, обґрунтовано наближені методи з широкого класу, в тому числі, методи в'язкості, покрокового згладжування, скінченно-різницеві методи. Такі результати отримано на основі єдиного підходу ([8-11]).

Залишається не вивченим питання відшукування класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких можна встановити існування та єдиність узагальненого розв'язку.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку отримати теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші у випадку конкретного вигляду матриці потоку, а саме, у випадку трикутної матриці потоку. Дослідити і віднайти обмеження для початкових функцій, та сформувати їхні функціональні класи, які забезпечують виконання принципу максимуму і розв'язність задачі Коші. Також доцільно отримати обґрунтування методу в'язкості, як наближеного методу розв'язування задачі Коші. Важливо також отримати оцінки збіжності з одночасною стійкістю за початковими функціями.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для системи квазілінійних рівнянь першого порядку розглянемо задачу Коші

$$u_t^j + \varphi^j(\hat{u}^j)_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^j) = 0, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$u^j|_{t=0} = u_0^j(x), j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де

$$u = u(t, x), u = (u^1, \dots, u^n), \hat{u}^j = (u^j, \dots, u^n), \varphi^j \in C^{2,\alpha}, \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \in C^{1,\alpha}, \\ u_0^1(x) \in L_\infty(R), u_0^j(x) \in C^1(R), j = 2, \dots, n.$$

Означення 1. Обмежена вимірна вектор-функція $u(t, x)$ така, що $u^j \in C^1(R)$, $j = 2, \dots, n$ називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо $\forall k \in R^1 \quad \forall f(t, x) \in C^{0,\infty}([0, T] \times R^1)$, $f(t, x) \geq 0$ при виконуються інтегральні умови

$$L(u, k, f) = - \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |u^1 - k| f_t + \text{sign}(u^1 - k) \left(\varphi^1(u) - \varphi^1(0, \hat{u}^2) - \varphi^1(k, \hat{u}^2) \right) f_x - \right. \\ \left. - \text{sign}(u^1 - k) \left(\varphi^1(0, \hat{u}^2)_x + \psi^1(t, x, u) \right) f \right\} dx dt \leq 0, \\ M_j(u, k, f) = - \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u^j f_t + \varphi^j(\hat{u}^j) f_x - \psi^j(t, x, \hat{u}^j) f \right\} dx dt = 0, j = 2, \dots, n, \text{ а умови (2)}$$

приймаються у сильному сенсі.

Надалі вважаємо, що

$$|u_0^j(x)| \leq M \text{ при } j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$0 \leq \frac{du_0^j(x)}{dx} \leq K \text{ при } j = 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} \right| \leq K_1, 0 \leq \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^s} \leq K_1, \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \geq 0 \text{ при } 2 \leq j \leq s \leq n. \quad (5)$$

Також нехай при $|v^j| \leq M_1(M)$, $j = 1, \dots, n$ справджується нерівність

$$\sum_{j=1}^n u^j \left(- \sum_{s=j}^n \frac{\partial \varphi^j(\hat{u}^j)}{\partial u^s} v^j - \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \right) \leq C \sum_{j=1}^n (u^j)^2 \quad (6)$$

Разом із задачею (1),(2) розглянемо також і таку задачу Коші

$$u_t^j + \varphi^j(\hat{u}^j)_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^j) = 0, j = 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$u^j|_{t=0} = u_0^j(x), j = 2, \dots, n, \quad (8)$$

Тут використовуємо класичні міркування і методи розв'язування для квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Теорема 1. В області $[0, T] \times R^1$ існує єдиний розв'язок $\hat{u}^2 \in C^1$ задачі (7),(8).

Доведення. За виконання умов гладкості, накладених на початкові функції, існує єдиний локальний розв'язок $\hat{u}^2 \in C^1$ задачі (7),(8), який може бути побудований за методом характеристик. А за виконання умов (4), (5), (6), які забезпечують відсутність вздовж характеристик утворення розривів і виконання принципу максимуму, завдяки лемі Гронуолла цей локально визначений розв'язок може бути продовжений і на всю область $[0, T] \times R^1$.

Для забезпечення існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2) скористаємося методом в'язкості. Задля цього за виконання накладених вище умов розглянемо таку задачу Коші

$$u_t^{\varepsilon,1} + \varphi^1(\hat{u}^{\varepsilon,1})_x + \psi^1(t, x, \hat{u}^{\varepsilon,1}) = \varepsilon u_{xx}^1, \quad (9)$$

$$u_t^{\varepsilon,j} + \varphi^j(\hat{u}^{\varepsilon,j})_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^{\varepsilon,j}) = 0, \quad j = 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$u^{\varepsilon,1}|_{t=0} = (u_0^1(x))^\varepsilon, \quad (11)$$

$$u^{\varepsilon,j}|_{t=0} = u_0^j(x), \quad j = 2, \dots, n, \quad (12)$$

де $(u_0^1(x))^\varepsilon$ - згладжена початкова функція $u_0^1(x)$ з допомогою усереднення.

Теорема 2. В області $[0, T] \times R^1$ існує єдиний класичний розв'язок задачі (9)-(12).

Доведення. Існування і єдиність розв'язку задачі (9)-(12) випливає з теореми 1, яка забезпечує існування компонент вектор-функції $j = 2, \dots, n$, і результатів і методів в [8-11]. Значимо при цьому, що умови (4)-(6) забезпечують виконання принципу максимуму для вектор-функції $u(t, x)$.

Задача (9)-(12) апроксимує задачу (1), (2), а отриманий розв'язок є наближеним для узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

При цьому якщо $\text{var}(u_0^1(x)) < +\infty$, то

$$L_1(u^{\varepsilon,1}, k, f) \leq \varepsilon \|\nabla f\|_C \text{var}_{\text{sup}f} u^{\varepsilon,1}(t, x), \quad (13)$$

тут $\|\cdot\|_C$ - норма у просторі неперервних функцій, $\text{var}(\cdot)$ - варіація у сенсі Тонеллі-Чезарі, $\text{sup}f$ - носій функції f . Це випливає з формули Остроградського при застосуванні оператора $L_1(u^\varepsilon, k, f)$ з врахуванням рівнянь системи (1).

Зауважимо також, що побудований наближений метод стійкий за початковими даними, і для вектор-функцій $u^\varepsilon(t, x)$ стійкими є модулі неперервності $\lambda(h)$ за змінною x в $L_{1,loc}(R)$ і $v_t(\tau)$ - за змінною t в $L_{1,loc}(R)$ ([7]).

Отримано оцінки збіжності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку задачі (1), (2) у наступному сенсі.

Теорема 3. Нехай $\text{var}(u_0(x)) < +\infty$ і $\text{var}(v_0(x)) < +\infty$. Тоді для розв'язків задачі (9)-(12) $u^{\varepsilon_1}(t, x)$ і $v^{\varepsilon_2}(t, x)$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ і таких, що відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta, \quad (14)$$

де $\delta \in (0, 1)$ залежить від даних системи (9), (10).

Доведення ґрунтується на методах робіт [2, 7-10].

Доведення. Нехай $\chi(K_{r,T})^h$ - усереднення з параметром h характеристичної функції $\chi(K_{r,T})$ зрізаного конуса $K_{r,T} = \{(t, x) | (K_1 t + r)^2 \geq |x|^2, 0 < t < T\}$. З врахуванням оцінки (13) при $f(t, x) = \chi(K_{r,T})^h$ отримуємо

$$\int_0^{T+\infty} \int L(u^{\varepsilon_1}, u^{\varepsilon_2}, f) dy d\tau \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h} C(T) \varlimsup_{suppf} u^{\varepsilon,j}(t, x),$$
 а далі після оптимізації за параметром h отримуємо оцінку (14).

Теорема 4. Нехай $u_0^1(x) \in L_\infty(R)$, $v_0^1(x) \in L_\infty(R)$. Тоді для розв'язків системи (9)-(12) $u^{\varepsilon_1}(t, x)$ і $v^{\varepsilon_2}(t, x)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, і таких, що відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \mu((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)), \quad (15)$$

де функція $\mu(\sigma) \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ залежить від сумісного модуля неперервності $\lambda(\sigma)$ в $L_{1,loc}(R)$ початкових функцій $u_0(x)$ і $v_0(x)$ та від параметрів системи (9), (10).

Доведення. Застосуємо теорему 3 до задачі зі згладженими першими компонентами початкових функцій з допомогою оператора усереднення з параметром h . Далі

$$\begin{aligned} \|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} &\leq \|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \|u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \\ &+ \|v^{\varepsilon_2}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \end{aligned}$$

А оскільки, враховуючи стійкість наближеного методу, і отримані оцінки (14)

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(x) - (u_0(x))^h\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \lambda(h),$$

$$\|v^{\varepsilon_2}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|v_0(x) - (v_0(x))^h\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \lambda(h),$$

$$\|u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{C\lambda(h)}{h},$$

після оптимізації за параметром h отримаємо оцінку (15).

Теорема 5. В області $[0, T) \times R^1$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2)

Доведення. Результат випливає з теореми 3 при $v_0(x) = u_0(x)$ і граничному переході при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ в оцінках (13)-(15).

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати розв'язності задачі Коші для системи з трикутною матрицею потоку є продовженням дослідження класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких встановлено аналогічні результати. У випадку діагональної матриці потоку наявні більш ширші дослідження, які включають і розв'язність і обґрунтування наближених методів. Така ж перспектива очікується і для введеного класу систем. З другого боку, очевидні конструкції контрприкладів переконують нас в доцільності виділення саме такого класу систем.

6 ВИСНОВКИ

У роботі для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку отримано теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші у випадку конкретного вигляду матриці потоку, а саме, у випадку трикутної матриці потоку. Початкові функції при цьому належать функціональним класам з обмеженнями. При

цьому отримано обґрунтування методу в'язкості, як наближеного методу розв'язування задачі Коші. Отримано оцінки, які дозволяють оцінювати неперервну залежність розв'язків від початкових даних задачі.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Lax, Peter D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves./ Philadelphia, Pa. : Society for Industrial & Applied Mathematics, 1973.
2. Kruzhkov, S. N. First order quasilinear equations in several independent variables./ Mathematics of the USSR-Sbornik 10, no. 2 (1970): 217–243.
3. Oleinik, O. A. On uniqueness and stability of a general solution of Cauchy's problem of quasilinear equations./ Uspekhi Matematicheskikh Nauk 14, no. 2 (1959): 165–170.
4. O.A. Ladyzenskaya, N.A. Solonnikov and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967
5. O.A. Ladyzenskaya and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.
6. Казмерчук А. І, Сеньків О. Я. Розв'язування задачі Коші для однієї системи квазілінійних рівнянь першого порядку засобами комп'ютерної технології // Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1996.- Вип.2. – с. 24-29
7. Liu, T.-P. (2000). Hyperbolic and viscous conservation laws. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719420>.
8. Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі //Вісник національного університету “Львівська політехніка”, Прикладна математика.-2000.-№411.-с.147-151
9. Казмерчук А. І. Оптимізація швидкості збіжності в методах наближеного розв'язування задачі Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число.-2018. -2(46), с.47-51
[https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2\(46\)-47-51](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51).
10. Казмерчук А.І. Умовно-коректна задача Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число. – 2023. - 18(67), с.49-53, [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18\(68\)-49-53](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53)
11. Казмерчук А. І. Наближення параболічними системами диференціальних рівнянь з частинними похідними вищих порядків систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число. – 2026. - 22(83), с.61-66 [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22\(83\)-61-66](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22(83)-61-66)

References

1. Lax, P. D. (1973). *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
2. Kruzhkov, S. N. (1970). First order quasilinear equations in several independent variables. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(2), 217–243.
3. Oleinik, O. A. (1959). On uniqueness and stability of a general solution of Cauchy's problem of quasilinear equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14(2), 165–170.
4. Ladyzenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'tseva, N. N. (1967). Linear and quasilinear equations of parabolic type (Vol. 23). Providence, RI: American Mathematical Society.
5. Ladyzenskaya, O. A., & Ural'tseva, N. N. (1968). Linear and quasilinear elliptic equations. New York, NY: Academic Press.
6. Kazmerchuk, A. I., & Senkiv, O. Ya. (1996). Solving the Cauchy problem for a system of first-order quasilinear equations using computer technology [Rozv'yazuvannya zadachi Koshi dlya

- odniyeyi systemy kvaziliniynykh rivnyan' pershoho poryadku zasobamy komp'yuternoyi tekhnolohiyi]. Visnyk Prykarpatskoho Universytetu. Matematyka. Fizyka. Khimiia, (2), 24–29. (In Ukrainian).
7. Liu, T.-P. (2000). Hyperbolic and viscous conservation laws. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. . <https://doi:10.1137/1.9780898719420>.
 8. Kazmerchuk, A. I. (2000). On the substantiation of approximate methods for solving quasilinear conservation laws with non-smooth data of the problem [Pro obgruntuvannya nablyzhenykh metodiv rozv'yazuvannya kvaziliniynykh zakoniv zberezheniya z nehladkymy danymy zadachi]. Bulletin of Lviv Polytechnic National University, Series of Applied Mathematics, (411), 147–151. (In Ukrainian).
 9. Kazmerchuk, A. I. (2018). Convergence speed optimization in methods of approximate solving of initial values problem for the system of quasilinear partial differential equations of the first order [Optymizatsiya shvydkosti zbizhnosti v metodakh nablyzhenoho rozv'yazuvannya zadachi pochatkovykh danykh dlya systemy kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' u chastynnykh pokhidnykh pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 2(46), 47–51. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2\(46\)-47-51](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51) (In Ukrainian).
 10. Kazmerchuk, A. (2023). Conditionally correct initial values problem for the system of quasilinear partial differential equations of the first order [Umovno korektna zadacha pochatkovykh danykh dlya systemy kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' u chastynnykh pokhidnykh pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 18(68), 49–53. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18\(68\)-49-53](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53) (In Ukrainian).
 11. Kazmerchuk, A. (2026). Approximation by parabolic systems of partial differential equations of higher order systems of quasilinear partial differential equations of the first order [Nablyzhennya parabolichnykh systemamy dyferentsialnykh rivnyan' vyshchykh poryadkiv sistem kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' z chastynnymy pokhidnymy pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 22(83), 61–66. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22\(83\)-61-66](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22(83)-61-66) (In Ukrainian).

Стаття надійшла до редакції 10.07.2026

Стаття прийнята до друку 10.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Казмерчук Анатолій Іванович

к. ф.-м. н., доцент

anatolii.kazmerchuk@cnu.edu.ua

[ORCID: 0009-0008-1668-1441](https://orcid.org/0009-0008-1668-1441)

Карпатський національний
університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, Україна,

Для посилань:

Казмерчук А.І. Розв'язність системи квазілінійних рівнянь першого порядку з трикутною матрицею потоку. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 2. С. 87-94.

For references:

Kazmerchuk. (2026). Solvability of a system of first-order quasilinear equations with a triangular flux matrix. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 87 –94.

[Розв'язність системи квазілінійних рівнянь першого порядку з трикутною матрицею потоку](#) © 2026 by Казмерчук А.І. is licensed under [CC BY 4.0](#)