

УДК 539.3

УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Фесенко Г.О.¹

¹Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Анотація: Досліджено усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикально розташованим циліндричним жорстким включенням, яке зчеплене з півпростором. На плоску грань півпростору діє гармонічне стискальне навантаження, зосереджене по колу, радіус якого перевищує радіус включення.

Методом інтегрального перетворення Вебера, застосованого безпосередньо до осесиметричних рівнянь руху та крайових умов, задачу зведено до неоднорідної векторної одновимірної задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Її розв'язано із застосуванням матричного диференціального числення. Побудовано спадаючий розв'язок відповідного однорідного матричного рівняння та фундаментальну матрицю-функцію.

Сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомої функції, що має механічний зміст дотичного напруження на циліндричній поверхні жорсткого включення, розв'язано методом колокацій. Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь першого роду розв'язано методом Гаусса. Інтеграли обчислені чисельно з урахуванням поведінки підінтегральних функцій поблизу особливих точок.

Застосування оберненого інтегрального перетворення Вебера завершує побудову просторового поля переміщень. Визначено нормальне напруження на циліндричній поверхні жорсткого включення під дією гармонічного навантаження та амплітуди коливань плоскої грані півпростору. Проведено аналіз отриманих результатів залежно від фізико-механічних характеристик матеріалу півпростору, відстані дії зовнішньої сили відносно включення та безрозмірної частоти коливань. Отримані результати можуть бути використані під час моделювання та аналізу напружено-деформованого стану конструкцій з циліндричними дефектами або жорсткими вставками. Запропонований підхід може бути поширений на розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на поверхні включення.

Ключові слова: інтегральне перетворення Вебера, векторна одновимірна крайова задача, матричне диференціальне числення, сингулярне інтегральне рівняння, усталені коливання.

STEADY-STATE OSCILLATIONS OF AN ELASTIC HALF-SPACE WITH A RIGID CYLINDRICAL INCLUSION

A. Fesenko¹

¹Odesa I.I. Mechnikov National University

Abstract: Steady-state oscillations of an elastic half-space containing a through-going vertically oriented rigid cylindrical inclusion bonded to the half-space are investigated. A harmonic compressive load concentrated along a circle whose radius exceeds that of the inclusion acts on the flat face of the half-space.

By applying the Weber integral transform directly to the axisymmetric equations of motion and boundary conditions, the problem is reduced to a non-homogeneous vector one-dimensional boundary value problem for the unknown displacement transforms, which is solved using matrix differential calculus. A decaying solution of the corresponding homogeneous matrix equation and a fundamental matrix function are constructed.

A singular integral equation for the unknown function, which has the mechanical meaning of the shear stress on the cylindrical surface of the rigid inclusion, is solved by the collocation method. The



resulting system of linear algebraic equations of the first kind is solved by Gaussian elimination. Numerical integration techniques are employed to evaluate the integrals, enabling proper treatment of the singular behavior of the integrands near the singular points.

Application of the inverse Weber integral transform completes the construction of the three-dimensional displacement field. The normal stress on the cylindrical surface of the rigid inclusion under harmonic loading and the vibration amplitude of the flat face of the half-space are determined. The results are analyzed as functions of the physical and mechanical properties of the half-space material, the distance of the external force from the inclusion, and the dimensionless frequency of oscillation. The results obtained may be used in the modeling and analysis of the stress-strain state of structures containing cylindrical defects or rigid inserts. The proposed approach can be extended to the solution of mixed dynamic problems of elasticity theory for other types of boundary conditions.

Keywords: Weber integral transform, vector one-dimensional boundary value problem, matrix differential calculus, singular integral equation, steady-state oscillations.

1 ВСТУП

Дослідження динамічних задач теорії пружності для півпростору з циліндричним включенням є важливим напрямом механіки деформівного твердого тіла. Такі задачі мають широке застосування в інженерній практиці. Циліндричні включення можуть зустрічатися у вигляді підземних трубопроводів, свердловин, армованих елементів у композитних матеріалах, а також геологічних неоднорідностей, таких як порожнини, заповнені іншим матеріалом. Вивчення динамічного впливу на такі включення дозволяє прогнозувати розвиток напружено-деформованого стану, оцінювати стійкість конструкцій і вдосконалювати методи їх розрахунку.

Наявність жорсткого циліндричного включення у пружному півпросторі суттєво змінює характер розподілу напружень та переміщень порівняно з однорідним середовищем. Особливо важливим є врахування динамічного характеру навантаження, оскільки за умов гармонічного збудження виникають резонансні явища, які можуть призводити до значної концентрації напружень на межі поділу включення та матриці. Така концентрація є потенційним джерелом зародження тріщин та руйнування конструкцій.

З математичної точки зору задачі про коливання пружних тіл з циліндричними неоднорідностями належать до класу мішаних крайових задач математичної фізики. Їх розв'язання пов'язане з необхідністю одночасного задоволення крайових умов на поверхні включення та на межі півпростору, що, як правило, призводить до сингулярних інтегральних рівнянь. Розробка ефективних аналітико-числових методів розв'язання таких рівнянь залишається актуальним завданням обчислювальної механіки.

Новизна та мета даної роботи з теоретичного погляду полягають у застосуванні та верифікації методу матричного диференціального числення Попова Г.Я. [1] для класичного об'єкта теорії пружності – пружного півпростору з наскрізним жорстким циліндричним включенням в динамічній постановці. З практичного погляду робота спрямована на аналіз коливальної поведінки плоскої грані півпростору та напруженого стану на поверхні включення під дією різних режимів навантаження.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Контактну задачу про взаємодію двох напружених півпросторів і пружного циліндричного штампу з початковими напруженнями без урахування сил тертя та у випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння досліджено у [2] з використанням теорії потенціалу. Застосовано інтегральне перетворення Ганкеля, отримані інтегральні рівняння розв'язано методом ортогональних поліномів. У роботі [3] побудовано точний розв'язок задачі про втискування жорсткого циліндру у пружний півпростір із тертям із збереженням впливу зсувного напруження на нормальне переміщення в зоні контакту. Загальний розв'язок побудовано методом Папковича-Нейбера у плоских біполярних координатах, з подальшим зведенням задачі до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого нормального напруження в зонах ковзання. У роботі [4] запропоновано аналітико-числовий алгоритм розв'язання задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами. На границях порожнин задають радіальні переміщення і дотичні напруження, а на межі півпростору – або переміщення або напруження. Використовується узагальнений метод Фур'є із зведенням задачі до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У роботі [5] неоднорідний півпростір з циліндричною порожниною знаходиться в умовах антиплоскої деформації під впливом динамічного навантаження, проаналізовано коефіцієнт інтенсивності напруження навколо дефекту. У [6] розглянуто динамічний

відгук півпростору з довільним циліндричним включенням паралельними граничній поверхні півпростору.

Теорії гармонічних коливань присвячено монографію [7], де в тому числі розглянуто задачі про збудження хвиль у півпросторі, нескінченному шарі та циліндрах, надається широкий огляд літератури з теми. Детально розглянута методика обчислення інтегралів, якими виражаються переміщення, прийомами теорії функцій комплексного змінного. Аналізу усталених коливань плоского жорсткого включення у тривимірних пружних тілах присвячено роботу [8], де використовується метод інтегральних рівнянь з особливістю потенціалу Гельмгольца. Методом граничних елементів будується дискретний аналог рівнянь, які враховують зростання функцій - розв'язків на контурі інтегрування, області дефекту. У [9] розглянуто динамічну задачу для півпростору з циліндричною порожниною, розташованою паралельно границі півпростору. Рівняння руху зводяться до двох хвильових рівнянь у полярних координатах з використанням потенціалів Гельмгольца. Для побудови полів зміщень через потенціали використовується метод розкладу хвильової функції. Граничні умови на поверхні порожнини виконуються точно, а на вільній поверхні півпростору – наближено. Таким чином, невідомі коефіцієнти в розкладах отримані з обробки граничних умов за допомогою схеми найменших квадратів. Проаналізовано вплив частоти коливань і глибина порожнини на переміщення і напруження у півпросторі. У [10] розглянуто пружний напівпростір із циліндричною порожниною скінченної довжини, що знаходиться під дією гармонічної за часом сили кручення. Використано метод інтегрального перетворення Фур'є та крайова задача зводиться до узагальненого сингулярного інтегрального рівняння Коші. Отримані інтегральні подання напруження та переміщення, які у виродженому випадку співпадають з аналогічними для статичної постановки задачі. У роботі [11] отримано числовий розв'язок задачі про різні типи навантажень циліндричного включення, жорстко закріпленого із пружним півпростором. Ключовим моментом в його побудові є використання інтегрального перетворення типу Вебера. Найбільш загальний вид таких перетворень отримано в [12]. Розв'язок задачі у статичній постановці для шару з циліндричним включенням наведено у [13], де запропоновано метод, що базується на застосуванні векторного інтегрального перетворення типу Вебера без використання зображень Папковича - Нейбера, що суттєво спростило розв'язання. У [14] проаналізовано напружений стан скінченного циліндру з урахуванням його власної ваги під дією осесиметричного навантаження. У роботі [15] запропонованим методом отримано точний розв'язок задачі усталених коливань пружного шару з циліндричним включенням, коли на поверхні включення задано умови гладкого контакту, а в [16] побудовано наближений розв'язок у випадку жорсткого зчеплення включення із пружним шаром.

У даній роботі розглянуто усталені коливання півпростору з циліндричним включенням із застосуванням методу матричного диференціального числення, розробленого Поповим Г.Я. [1].

Пружний півпростір $a < r < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < z < \infty$ з коефіцієнтом Пуассона μ та модулем зсуву G наскрізь ослаблений круговим жорстким включенням $0 \leq r \leq a$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 < z < \infty$, який зчеплений з середовищем. По грані півпростору $z=0$ діє осесиметричне гармонічне стискальне навантаження $p(r,t) = P(r)e^{-i\omega t}$, ω – частота коливань. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, надалі опускаємо та розглядаємо тільки амплітудні значення коливань півпростору $u_r(r,z) \equiv u(r,z)$, $u_z(r,z) \equiv w(r,z)$, що задовольняють осесиметричним рівнянням руху [2]

$$\begin{aligned} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] - r^{-2} u(r, z) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial r \partial z} &= -k_1^2 u(r, z), \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \right] &= -k_2^2 w(r, z), \end{aligned} \quad (1)$$

де $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$ – хвильові числа, c_1, c_2 – швидкості розповсюдження поздовжньої та поперечної хвилі відповідно, $\kappa = 3 - 4\nu$, та крайовим умовам

$$\sigma_z(r, 0) = -P(r), \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u_r(a, z) = 0, u_z(a, z) = 0. \quad (3)$$

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є побудова аналітико-числового розв'язку задачі про усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикальним циліндричним жорстким включенням, зчепленим з півпростором, під дією гармонічного навантаження, заданого на плоскій грані.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Введемо наступні безрозмірні координати

$$\rho = a^{-1}r, \xi = a^{-1}z, \rho \in [1, \infty), \xi \in [0, \infty).$$

Позначимо переміщення $u(r, z) = U(\rho, \xi)$, $w(r, z) = W(\rho, \xi)$ та запишемо рівняння руху (1) в нових координатах

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right] - \rho^{-2} U + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \xi} &= -k_1^2 U(\rho, \xi), \\ \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\kappa-1} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] &= -k_2^2 W(\rho, \xi), \end{aligned} \quad (4)$$

тут і далі k_1, k_2 означають безрозмірні хвильові числа $a k_j$, тобто $k_2 = \Omega$, $k_1 = \Omega \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$.

Умови жорсткого закріплення (3) для $r = a$, враховуючи заміну, набувають вигляду

$$U(1, \xi) = 0, W(1, \xi) = 0. \quad (5)$$

Умови на грані $z = 0$ півпростору запишемо враховуючи зв'язок між переміщеннями та напруженнями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, 0)}{\partial \rho} + \frac{\partial U(\rho, 0)}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial U(\rho, 0)}{\partial \rho} + \rho^{-1} U(\rho, 0) + \frac{1+\kappa}{3-\kappa} \frac{\partial W(\rho, 0)}{\partial \xi} &= -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P(\rho). \end{aligned} \quad (6)$$

Послідовно застосуємо до системи (4) та граничних умов (6) інтегральне перетворення [12] Вебера за змінною ρ

$$U_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho U(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, U(\rho, \xi) = \int_0^\infty \frac{\lambda U_\lambda(\xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)},$$

$$W_{\lambda}(\xi) = \int_1^{\infty} \rho W(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, \quad W(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda W_{\lambda}(\xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)}, \quad (7)$$

де $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $J_i(\lambda)$, $N_i(\lambda)$ – відповідно функції Бесселя та Неймана, $i = 0, 1$.

Це приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант

$$U_{\lambda}''(\xi) - \frac{2}{\kappa-1} \lambda W_{\lambda}'(\xi) - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda^2 U_{\lambda}(\xi) + k_2^2 U_{\lambda}(\xi) = 0, \\ W_{\lambda}''(\xi) + \frac{2}{\kappa+1} \lambda U_{\lambda}'(\xi) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 W_{\lambda}(\xi) + k_1^2 W_{\lambda}(\xi) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \chi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (8)$$

де $\chi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \xi)$ – невідома функція. Штрихом позначено похідну за аргументом.

Крайові умови (6) у трансформантах (7) записано у формі

$$\lambda U_{\lambda}(0) + \frac{1+\kappa}{3-\kappa} W_{\lambda}'(0) = -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P_{\lambda}, \quad U_{\lambda}'(0) - \lambda W_{\lambda}(0) = 0, \quad (9)$$

$$P_{\lambda} = \int_1^{\infty} \rho P_p(a\rho) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho.$$

Отриману одновимірну крайову задачу (8), (9) сформулюємо у векторній формі. Введемо до розгляду невідомий вектор трансформант переміщень, матриці та диференціальний оператор

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{\lambda}(\xi) \\ W_{\lambda}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\kappa-1} \\ \frac{2}{\kappa+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_2^2 & 0 \\ 0 & k_1^2 \end{pmatrix} \\ L_2 \mathbf{y}(\xi) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + \lambda \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - (\lambda^2 \mathbf{P} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{y}(\xi). \quad (10)$$

Крайові умови (9) переписано за допомогою граничного функціонала

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(0) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(0), \\ \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\kappa+1}{3-\kappa} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючі (10), задачу (8), (9) запишемо у векторній формі

$$L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{f}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \\ U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \gamma, \quad (11)$$

$$\text{де } \mathbf{f}(\xi) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\xi) \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P_{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як показано у [1] розв'язок задачі (11) можна сконструювати у зображенні

$$\mathbf{y}(\xi) = \int_0^{\infty} \Phi(\xi, \eta) \mathbf{f}(\eta) d\eta + \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C}, \quad (12)$$

де $\Phi(\xi, \eta)$ – фундаментальна матриця-функція рівняння (11), $\mathbf{Y}_-(\xi)$ – спадаючий розв’язок відповідного (11) однорідного матричного рівняння, $\mathbf{C}$ – вектор констант, який знаходиться із крайових умов (9).

Розглянемо відповідне (11) однорідне рівняння $L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}$, $0 < \xi < \infty$. З метою побудувати його розв’язок необхідно попередньо знайти розв’язок відповідного матричного рівняння $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}$. Якщо матрицю подати у формі $\mathbf{Y}(\xi) = e^{s\xi} \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ – одинична матриця, то можна перевірити виконання співвідношення $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = L_2 e^{s\xi} \mathbf{I} = e^{s\xi} \mathbf{M}(s)$, де характеристична матриця $\mathbf{M}(s)$ має вигляд

$$\mathbf{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^2 & -\frac{2}{\kappa-1} \lambda s \\ \frac{2}{\kappa+1} \lambda s & s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_1^2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок матричного рівняння відповідно має форму [1]

$$\mathbf{Y}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathbf{M}^{-1}(s) e^{s\xi} ds,$$

де C – замкнений контур, що містить всі полюси підінтегральної функції. Цими полюсами будуть нулі визначника матриці $\mathbf{M}^{-1}(s)$, що має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{M}_0(s)}{\det \mathbf{M}(s)}, \quad \det \mathbf{M}(s) = \left[s^2 - \left(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \right)^2 \right] \left[s^2 - \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right)^2 \right],$$

$$\mathbf{M}_0(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa+1} + k_1^2 & \frac{2}{\kappa-1} \lambda s \\ -\frac{2}{\kappa+1} \lambda s & s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa-1} + k_2^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо зафіксувати полюси $s = -\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $s = -\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ та замкнути контур C_- , отримаємо спадаючий розв’язок $\mathbf{Y}_-(\xi)$. Використання теореми про лишки завершує розв’язання рівняння $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{Y}_-(\xi) = \frac{1}{2k_2^2} \left[e^{-\Delta_1 \xi} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2}{\Delta_1} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \\ -\lambda & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Delta_1 \end{pmatrix} + e^{-\Delta_2 \xi} \begin{pmatrix} \Delta_2 & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \\ \lambda & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}. \quad (14)$$

Для знаходження фундаментальної матриці-функції $\Phi(\xi, \eta)$ довизначимо функцію $\mathbf{f}(\xi)$ у правій частині рівняння (11) нулем на всю дійсну вісь та застосуємо до рівняння інтегральне перетворення Фур’є, звідки отримано, що

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^{-1}(is) e^{-is(\xi-\eta)} ds$$

Обернена $\mathbf{M}^{-1}(is)$ до характеристичної матриці, побудована на основі оператора (10) та має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(is) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} -s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_1^2 & \frac{2}{\kappa-1} \lambda is \\ -\frac{2}{\kappa+1} \lambda is & -s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{M} = \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \right)^2 \right] \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right)^2 \right].$$

Після замикання контурів $C_{\pm}$ таким чином, щоб виконувались умови Леми Жордана та застосування основної теореми про лишки, маємо

$$\Phi(\xi, \eta) = i \begin{cases} -\underset{s_1}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right) - \underset{s_3}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right), & \xi - \eta > 0 \\ \underset{s_2}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right) + \underset{s_4}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right), & \xi - \eta < 0 \end{cases},$$

де полюси першого порядку мають вигляд

$$s_1 = -i\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad s_3 = -i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad s_2 = i\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad s_4 = i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

В результаті фундаментальна матриця-функція набуває вигляду

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2k_2^2} \left[e^{-\Delta_1|\xi-\eta|} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2}{\Delta_1} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \\ -\lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Delta_1 \end{pmatrix} + e^{-\Delta_2|\xi-\eta|} \begin{pmatrix} \Delta_2 & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \\ \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \right].$$

Таким чином з (12), запишемо загальну форму розв'язку у векторній формі

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{\lambda}(\xi) \\ W_{\lambda}(\xi) \end{pmatrix} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\eta) \end{pmatrix} d\eta + \begin{pmatrix} y_{11}^{-}(\xi) & y_{12}^{-}(\xi) \\ y_{21}^{-}(\xi) & y_{22}^{-}(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

Трансформанти переміщень відповідно мають форму

$$U_{\lambda}(\xi) = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2k_2^2} \lambda \int_0^{\infty} \chi(\eta) \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \left[e^{-\Delta_1|\xi-\eta|} - e^{-\Delta_2|\xi-\eta|} \right] d\eta + y_{11}^{-}(\xi) C_0 + y_{12}^{-}(\xi) C_1,$$

$$W_{\lambda}(\xi) = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2k_2^2} \int_0^{\infty} \chi(\eta) \left[\Delta_1 e^{-\Delta_1|\xi-\eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|\xi-\eta|} \right] d\eta + y_{21}^{-}(\xi) C_0 + y_{22}^{-}(\xi) C_1. \quad (15)$$

Введемо позначення

$$T = 2\lambda^2 - k_2^2, \quad Q = T - 2\Delta_1\Delta_2, \quad R(\lambda) = T^2 - 4\lambda^2\Delta_1\Delta_2, \quad k_1^2 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} k_2^2. \quad (16)$$

Виконання крайових умов (9) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих констант

$$\frac{\lambda Q}{k_2^2 \Delta_1} C_0 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} C_1 = g_1, \quad C_0 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda Q}{k_2^2 \Delta_2} C_1 = g_2,$$

де

$$g_1 = -2 \frac{a}{G} P_\lambda - \frac{\chi_0(1, \lambda)}{k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left[(2\lambda^2 - k_2^2) e^{-\Delta_1 \eta} - 2\lambda^2 e^{-\Delta_2 \eta} \right] d\eta,$$

$$g_2 = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{k_2^2} \lambda \int_0^\infty \chi(\eta) \left[2\Delta_1 e^{-\Delta_1 \eta} - \frac{2\lambda^2 - k_2^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 \eta} \right] d\eta.$$

Визначник системи має вигляд

$$\det = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2 Q^2 - k_2^4 \Delta_1 \Delta_2}{k_2^4 \Delta_1 \Delta_2} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}{k_2^4 \Delta_1 \Delta_2}$$

та дорівнює нулю, коли

$$R(\lambda) = (2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad \lambda = k_R - \text{корінь хвилі Релея.} \quad (17)$$

Множник $\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2$ на дійсній півосі не перетворюється на нуль,

$$C_0 = \frac{k_2^2 \Delta_1 (\lambda Q \cdot g_1 - k_2^2 \Delta_2 \cdot g_2)}{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}, \quad C_1 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{k_2^2 \Delta_2 (\lambda Q \cdot g_2 - k_2^2 \Delta_1 \cdot g_1)}{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}.$$

Після підстановки отриманих констант у розв'язок (15), та врахування вигляду елементів y_{ij}^- , $i, j = 1, 2$ спадаючого розв'язку (13), отримано розв'язок одновимірної векторної крайової задачі (11), (9)

$$U_\lambda(\xi) = \frac{a}{G} \frac{P_\lambda}{R(\lambda)} \left[\lambda T \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\lambda \Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left\{ \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 (\xi + \eta)} - 4\lambda^2 T e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta} - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta} + R e^{-\Delta_2 (\xi + \eta)} \right] \right\} d\eta,$$

$$W_\lambda(\xi) = \frac{a}{G} \frac{P_\lambda \Delta_1}{R(\lambda)} \left[T \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\lambda^2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi \lambda k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left\{ \left[\Delta_1 e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \right.$$

$$+\frac{1}{R(\lambda)}\left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1(\xi+\eta)}-4\lambda^2 T \Delta_1\left(e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta}+e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta}\right)+\frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2(\xi+\eta)}\right]\left\} d \eta .\right.$$

Тут було враховано, що згідно с формулою (17)

$$\chi_0(1, \lambda)=J_0(\lambda) N_1(\lambda)-N_0(\lambda) J_1(\lambda)=-\frac{2}{\pi \lambda},$$

а також позначення

$$R=T^2+4 \lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 .$$

Для отримання розв'язку вихідної задачі (4)-(6) необхідно до отриманих трансформант (18) застосувати обернене інтегральне перетворення Вебера (7).

Під час розв'язання залишилася нереалізованою крайова умова на циліндричній поверхні включення із (5), а саме $W(1, \xi)=0$. Після вимоги її виконання на основі розв'язку (18) для $W(\rho, \xi)$ отримано інтегральне рівняння відносно невідомої функції

$$\chi(\eta)=\frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$$

у вигляді

$$\int_0^{\infty} \chi(\eta) K(\xi, \eta) d \eta=F(\xi), \quad 0<\xi<\infty, \quad (19)$$

$$F(\xi)=\frac{2}{\pi} \frac{a}{G} \int_0^{\infty} \frac{P_{\lambda}}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)}\left[T \cdot e^{-\Delta_1 \xi}-2 \lambda^2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi}\right] d \lambda,$$

$$K(\xi, \eta)=\frac{2}{\pi^2 k_2^2} \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda} \frac{1}{f(\lambda)}\left[\Delta_1 e^{-\Delta_1|\xi-\eta|}-\frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|\xi-\eta|}\right]+\right. \\ \left.+\frac{1}{R(\lambda)}\left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1(\xi+\eta)}-4 \lambda^2 T \Delta_1\left(e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta}+e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta}\right)+\frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2(\xi+\eta)}\right]\right\} d \lambda,$$

$$f(\lambda)=J_1^2(\lambda)+N_1^2(\lambda). \quad (20)$$

Функції Δ_1, Δ_2 визначені в (14), $T, R(\lambda)$ – у (16).

Визначимо по грані півпростору крайові умови (2) або в новій системі координат умови (6). Гармонічне навантаження $p(r, t)=P(r) e^{-i \omega t}$: стискальна сила інтенсивності q зосереджена по колу радіусу $b, b>a$, (a – радіус включення) – $p(r, t)=q \delta(r-b) e^{-i \omega t}$, $\delta(r)$ – функція Дірака. В цьому випадку трансформанта навантаження (9) має вигляд

$$P_{\lambda}=q \frac{b}{a} \frac{1}{a} \chi_0\left(\frac{b}{a}, \lambda\right)=q \frac{b}{a^2}\left[J_0\left(\frac{b}{a} \lambda\right) N_1(\lambda)-N_0\left(\frac{b}{a} \lambda\right) J_1(\lambda)\right]. \quad (21)$$

Для порівняння розглянуто також рівномірний тиск інтенсивності p_0 , прикладений на кільцевій ділянці грані, що прилягає до включення $p(r, t) = p_0 e^{-i\omega t}$, $a < r < b$ і $p(r, t) = 0$, $r > b$. Враховуючи співвідношення $\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \chi_1(\rho, \lambda)] = \lambda \rho \chi_0(\rho, \lambda)$ і $\chi_1(1, \lambda) = 0$, з (9) отримуємо

$$P_\lambda = p_0 \int_1^{b/a} \rho \chi_0(\rho, \lambda) d\rho = p_0 \frac{b}{a} \frac{\chi_1(b/a, \lambda)}{\lambda}. \quad (22)$$

Щоб порівняння (21) та (22) було коректним, інтенсивність p_0 вибрано так, щоб сумарна сила збігалася з сумарною силою кільцевого зосередженого навантаження

$$\pi(b^2 - a^2)p_0 = 2\pi b q, \text{ тобто } p_0 = \frac{2bq}{b^2 - a^2}.$$

В силу того, що $\tau_{\rho\xi} = G\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$, маємо, що на циліндричній поверхні $\rho = 1$, $0 < \xi < \infty$ жорсткого включення невідома функція $\chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$ має механічний зміст дотичного напруження. Визначимо порядок особливості невідомої функції для $\eta = 0$. Для цього розглянемо клиноподібну область [18], в даному випадку кут дорівнює $\pi/2$. Таким чином, для $\eta = 0$ маємо випадок, коли одну границю клину закріплено, а по іншій діє сила. В цьому випадку розв'язок $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$ має особливість γ , яка залежить від значення коефіцієнту Пуассона

$$\mu = 1/4 \Rightarrow \gamma = -0.25525; \mu = 1/3 \Rightarrow \gamma = -0.31001.$$

В результаті маємо на поверхні включення

$$\tau_{\rho\xi}(1, \xi) = \frac{G}{a} \chi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (23)$$

а сила, що передається на включення має вигляд

$$F_{\text{вкл}} = 2\pi a \int_0^\infty \tau_{\rho\xi}(a, z) dz = 2\pi a G \int_0^\infty \chi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Розв'язок рівняння (19) будемо розшукувати методом колокацій. Інтервал $[0, \infty)$ замінимо відрізком $[0, L_\eta]$, на якому невідома функція $\chi(\eta)$ практично згасає, і розіб'ємо його $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = L_\eta$. Сітку згущено з урахуванням особливості $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$. Невідому функцію подамо кусково-сталою

$$\chi(\eta) = \sum_{n=1}^N x_n \theta_n(\eta), \quad \theta_n(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta_{n-1} < \eta < \eta_n \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (25)$$

x_n – невідомі константи.

Вимагаючи виконання рівняння (19) у середині елементів $\xi_m = \frac{1}{2}(\eta_{m-1} + \eta_m)$, $m = 1, \dots, N$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} x_n = F(\xi_m), \quad m = \overline{1, N}, \quad (26)$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\lambda f(\lambda)} \left[\Delta_1 I_{mn}(\Delta_1) - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} I_{mn}(\Delta_2) \right] + \frac{1}{R(\lambda)} \left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\lambda^2 T \Delta_1 \left(e^{-\Delta_1 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_2) + e^{-\Delta_2 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_1) \right) + \frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_2) \right] \right\} d\lambda,$$

де інтеграли по η від експонент обчислені у замкненому вигляді ($h_n = \eta_n - \eta_{n-1}$)

$$I_{mn}(\Delta) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} e^{-\Delta|\xi_m - \eta|} d\eta = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\eta_{n-1} - \xi_m)}, & \xi_m < \eta_{n-1}, \\ \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\xi_m - \eta_n)}, & \xi_m > \eta_n, \\ \frac{2(1 - e^{-\Delta h_n/2})}{\Delta}, & m = n, \end{cases},$$

$$\Lambda_n(\Delta) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} e^{-\Delta \eta} d\eta = \frac{e^{-\Delta \eta_{n-1}} - e^{-\Delta \eta_n}}{\Delta}, \quad \operatorname{Re} \Delta \geq 0, \quad \Delta = \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

Завдяки аналітичному інтегруванню по η логарифмічна особливість ядра $K(\xi, \eta)$ в (19) не потребує окремої обробки. Систему (26) розв'язано методом Гаусса. Знайдені константи x_n підставляються у вираз (25), який в свою чергу підставляється у переміщення $U(\rho, \xi)$, $W(\rho, \xi)$ (18), (7).

Таким чином, знайдено наближений розв'язок задачі про усталені коливання для пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням.

Для визначення прогину плоскої грані півпростору $\xi = 0$ скористаємося формулами (7), (18) та знайдемо амплітуду

$$W(\rho, 0) = \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} W_\lambda(0) d\lambda = -\frac{a}{G} k_2^2 \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} d\lambda - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \int_0^\infty \chi(\eta) \left[2\lambda^2 e^{-\Delta_2 \eta} - (2\lambda^2 - k_2^2) e^{-\Delta_1 \eta} \right] d\eta d\lambda,$$

тут $\chi_0(\rho, \lambda) = J_0(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_0(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$, трансформанта P_λ визначена у (21) або (22), $R(\lambda)$ у (17), $f(\lambda)$ у (20). Звідси

$$W(\rho, 0) = -\frac{a}{G} k_2^2 \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} d\lambda - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N x_n \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \left[2\lambda^2 \Lambda_n(\Delta_2) - (2\lambda^2 - k_2^2) \Lambda_n(\Delta_1) \right] d\lambda. \quad (28)$$

Перший доданок (28) – розв'язок задачі Лемба для зосередженого навантаження півпростору без включення, другий – внесок включення.

При $\Omega \rightarrow 0$ ($k_2 \rightarrow 0$) маємо з (14): $\Delta_j \rightarrow \lambda$, $j = 1, 2$, з (17): $R(\lambda) \sim -\frac{4}{\kappa+1} k_2^2 \lambda^2$, отже трансформанта першого доданка (28)

$$W_\lambda^{(P)}(0) = -\frac{a}{G} \frac{P_\lambda k_2^2 \Delta_1}{R(\lambda)} \rightarrow \frac{a}{G} (1-\mu) \frac{P_\lambda}{\lambda},$$

а сам перший доданок (28) переходить у розв'язок статичної задачі Буссінеска для кільцевого навантаження [19]:

$$W^{(P)}(\rho, 0) = \frac{a}{G} (1-\mu) \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} d\lambda. \quad (29)$$

Це слугує контролем правильності отриманих трансформант. Чисельно при $\Omega = 0.005$ перший доданок (28) збігається зі статичним розв'язком (29) з точністю до 10^{-4} . Тут $(\kappa+1)/4 = 1-\mu$. Граничний перехід перевірено чисельно: Для $\rho = 1.5; 3; 5$ при $\Omega \rightarrow 0$ дійсна частина (28) прямує до статичного значення (29), уявна – до нуля:

	$\rho = 1.5$	$\rho = 3$	$\rho = 5$
$\Omega = 0.005, \text{Re}W^{(P)}(\rho, 0)$	0.84868	0.52280	0.28212
Статична формула	0.84876	0.52278	0.28218

Уявна частина при $\Omega = 0.005$ становить 0.004.

Для першого доданку (28) уявну та дійсну частини можна виписати у явному вигляді. Введемо позначення

$$\delta_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2}, \lambda < k_j, j = 1, 2 \Rightarrow \Delta_j = -i\delta_j, g(\rho, \lambda) = \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)}.$$

На трьох ділянках маємо

$$0 < \lambda < k_1 : \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} = \frac{-i\delta_1}{T^2 + 4\lambda^2 \delta_1 \delta_2}; \quad \lambda > k_2 : \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \text{ дійсне};$$

$$k_1 < \lambda < k_2 : \frac{\Delta_1 (T^2 - 4i\lambda^2 \Delta_1 \delta_2)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2};$$

Звідси уявна і дійсна частини першого доданка (28) мають вигляд

$$\text{Im}W^{(P)}(\rho, 0) = \frac{a}{G} k_2^2 \left[\int_0^{k_1} \frac{\delta_1 g(\rho, \lambda)}{T^2 + 4\lambda^2 \delta_1 \delta_2} d\lambda + \int_{k_1}^{k_2} \frac{4\lambda^2 \Delta_1^2 \delta_2 g(\rho, \lambda)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2} d\lambda - \pi \frac{\Delta_1 g(\rho, \lambda)}{R'(\lambda)} \Big|_{\lambda=k_R} \right],$$

$$\text{Re}W^{(P)}(\rho, 0) = -\frac{a}{G} k_2^2 \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{T^2 \Delta_1 g(\rho, \lambda)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2} d\lambda + \text{v.p.} \int_{k_2}^\infty \frac{\Delta_1 g(\rho, \lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \right].$$

Сталі χ_n в (28) комплексні, тому уявна та дійсні частини повного розв'язку обчислюється в цілому.

Нормальне напруження $\sigma_\rho(\rho, \xi)$ знаходиться за формулою [13]

$$\sigma_p(\rho, \xi) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{G}{a} \left[\frac{\partial U(\rho, \xi)}{\partial \rho} + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \left\{ \frac{1}{\rho} U(\rho, \xi) + \frac{\partial W(\rho, \xi)}{\partial \xi} \right\} \right].$$

На циліндричній поверхні включення $\rho=1$, $\xi \in [0, \infty]$, маємо з (5) рівність нулю переміщень, а значить і $\frac{\partial W(1, \xi)}{\partial \xi} = 0$. Тоді з формули залишається

$$\sigma_p(1, \xi) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{G}{a} \frac{\partial U(1, \xi)}{\partial \rho}.$$

Використовуючи (7) та $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $i = 0, 1$, будемо мати

$$\chi_0(1, \lambda) = -\frac{2}{\pi\lambda}, \quad \chi_1(1, \lambda) = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi_1(\rho, \lambda)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -\frac{2}{\pi}.$$

На базі розв'язку (18), (7) отримано наступний вираз нормального напруження

$$\begin{aligned} \frac{a}{G} \sigma_p(1, \xi) = & -\frac{2}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{a}{G} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 P_\lambda}{f(\lambda) R(\lambda)} \left[(2\lambda^2 - k_2^2) \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^\infty \frac{\lambda}{f(\lambda)} \int_0^\infty \chi(\eta) K_U(\xi, \eta, \lambda) d\eta d\lambda, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} K_U(\xi, \eta, \lambda) = & \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \\ & + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 (\xi + \eta)} - 4\lambda^2 T e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta} - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta} + R e^{-\Delta_2 (\xi + \eta)} \right]. \end{aligned}$$

Після підстановки $\chi(\eta)$ з (25) у (30) доданки з експонентами $e^{-\Delta_j \eta}$ у $K_U(\xi, \eta, \lambda)$ дають $\Lambda_n(\Delta_j)$ з (27). Доданок із $\operatorname{sgn}(\xi - \eta)$ також інтегрується по η в замкненому вигляді ($h_n = \eta_n - \eta_{n-1}$)

$$S_n(\Delta, \xi) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) e^{-\Delta |\xi - \eta|} d\eta = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\xi - \eta_n)}, & \xi > \eta_n, \\ -\frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\eta_{n-1} - \xi)}, & \xi < \eta_{n-1}, \\ \frac{e^{-\Delta(\eta_n - \xi)} - e^{-\Delta(\xi - \eta_{n-1})}}{\Delta}, & \eta_{n-1} < \xi < \eta_n. \end{cases}$$

Тоді нормальне напруження (30) на поверхні включення набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{a}{G} \sigma_p(1, \xi) = & -\frac{2}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{a}{G} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 P_\lambda}{f(\lambda) R(\lambda)} \left[(2\lambda^2 - k_2^2) \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \sum_{n=1}^N x_n \int_0^\infty \frac{\lambda}{f(\lambda)} \left\{ S_n(\Delta_1, \xi) - S_n(\Delta_2, \xi) + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 \xi} \Lambda_n(\Delta_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} \Lambda_n(\Delta_1) + R e^{-\Delta_2 \xi} \Lambda_n(\Delta_2) \right] \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (31)$$

Амплітуда нормального напруження має вигляд

$$|\sigma_p(1, \xi)| = \sqrt{(\operatorname{Re} \sigma_p(1, \xi))^2 + (\operatorname{Im} \sigma_p(1, \xi))^2}.$$

Для аналізу поведінки підінтегральної функції при скористаємося асимптотикою циліндричних функцій $J_1(\lambda) \sim \lambda/2$, $N_1(\lambda) \sim -2/\pi\lambda$ та (20), (14), (17). Отже

$$f(\lambda) \sim \frac{4}{\pi^2 \lambda^2}, \quad \chi_0(\rho, \lambda) \sim -\frac{2}{\pi \lambda}, \quad \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \sim -\frac{\pi \lambda}{2} \rightarrow 0, \quad \Delta_j \rightarrow -ik_j, \quad R(\lambda) \rightarrow k_2^4.$$

Тому підінтегральна функція першого доданка (28) поводить як $O(\lambda)$, а ядро рівняння (19) містить множник $1/(\lambda f(\lambda)) \sim \pi^2 \lambda/4$. Точка $\lambda = 0$ не є особливою.

При $\lambda \rightarrow \infty$ маємо

$$f(\lambda) \sim \frac{2}{\pi \lambda}, \quad \chi_0(\rho, \lambda) \sim -\frac{2}{\pi \lambda \sqrt{\rho}} \cos((\rho-1)\lambda), \quad \Delta_j \sim \lambda - \frac{k_j^2}{2\lambda}, \quad R(\lambda) \sim -\frac{4}{\kappa+1} k_2^2 \lambda^2.$$

Звідси підінтегральна функція першого доданка (28) має порядок

$$\frac{\kappa+1}{2\pi\sqrt{\rho b/a}} \frac{\cos((\rho-1)\lambda) \cos((b/a-1)\lambda)}{\lambda}.$$

Інтеграл збігається умовно при $\rho \neq b/a$. При $\rho = b/a$ він має логарифмічну особливість, що відповідає переміщенню під лінією дії зосередженої сили.

Доданки з $\chi(\eta)$ спадають швидко, якщо $\chi(\eta) \sim C\eta^\gamma$ при $\eta \rightarrow 0$, то

$$2\lambda^2 E_2 - TE_1 \sim C\Gamma(\gamma+1) \left[(\gamma+1)(k_2^2 - k_1^2) + k_2^2 \right] \lambda^{-\gamma-1}, \quad \text{де } E_j = \int_0^\infty \chi(\eta) e^{-\Delta_j \eta} d\eta.$$

Тоді підінтегральна функція другого доданка (28) має порядок $\lambda^{-\gamma-2}$ і при $\gamma > -1$ інтеграл збігається абсолютно.

Ядро інтегрального рівняння (19) при $\lambda \rightarrow \infty$ містить $1/(\lambda f(\lambda)) \rightarrow \pi/2$ і

$$\Delta_1 e^{-\Delta_1 |\xi-\eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 |\xi-\eta|} \sim -\frac{k_1^2 + k_2^2}{2\lambda} e^{-\lambda |\xi-\eta|}.$$

Тому ядро має логарифмічну особливість

$$K(\xi, \eta) = \frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)} \ln |\xi - \eta| + O(1), \quad \eta \rightarrow \xi.$$

Це слабка (інтегрована) особливість, характерна для рівнянь першого роду.

Як і було показано невідома функція $\chi(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ має степеневу особливість кута клину $\pi/2$, одна грань закріплена, інша – вільна. Чисельний розв'язок дає $|\chi(\eta)| \sim \eta^{-0.315}$ (для одиничної частоти), що узгоджується з η^γ , $\gamma = -0.31001$, знайденим аналітично: $\chi(\eta)$ має інтегровану особливість у кутовій точці. Тому сітку по η згущено до малого значення η . При $\eta \rightarrow \infty$ функція $\chi(\eta)$ спадає, що забезпечує збіжність інтегралів по η .

У формулах (20), (28), (31) інтеграли беруться за змінною λ від нуля до нескінченності. Особливими точками підінтегральних функцій на дійсній півосі є $\lambda = 0$, точки розгалуження $\lambda = k_1$, $\lambda = k_2$ і простий полюс $\lambda = k_R$ – корінь рівняння (17): $R(\lambda) = 0$ (при $\mu = 1/3$, $k_R \approx 1.07236k_2$). Гілки коренів (14) вибираються із умов випромінювання при множителі $e^{-i\omega t}$: головна гілка $\operatorname{Re} \Delta_j \geq 0$, а при $0 \leq \lambda < k_j$ – $\Delta_j = -i\sqrt{k_j^2 - \lambda^2}$. Відповідно полюс k_R обходиться знизу, тобто $\int_0^\infty = \text{v.p.} \int_0^\infty + i\pi \operatorname{Res}(\lambda = k_R)$. Те саме дає інтегрування по контуру, зміщеному в нижню півплощину: $\lambda = t - i\delta \sin(\pi t / L)$, $0 \leq t \leq L$, $L = 1.3k_R + 1 > k_R$, $\delta = \min(0.5; 0.3k_2)$ Особливості k_1, k_2 мають вигляд $\sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$ і є інтегрованими. При $\lambda > L$ інтегрування ведеться по дійсній осі: для ядра рівняння (20) – до $\lambda \sim 10^5$ на логарифмічно розподілених проміжках, для (28), (31) – до $\lambda = 600$. На кожному проміжку застосовано формулу Гаусса-Лежандра (8-10 вузлів). Точність перевірено порівнянням з явними формулами в задачі Лемба – збіг до 10^{-5} і подвоєнням числа вузлів. Невідому функцію $\chi(\eta)$ на $[0, L_\eta]$, $L_\eta = 8 \div 20$ апроксимовано на сітці: перший крок $2 \cdot 10^{-3}$, коефіцієнт зростання 1.15, найбільший крок $\min[0.25; 2\pi/(10\Omega)]$, Ω – частота. Інтегральне рівняння (19) задовольняється в середині елементів, тобто методом колокацій. Інтеграл по η від експонент у ядрі обчислені аналітично (27), тож логарифмічна особливість ядра окремої обробки не потребувала. Одержану систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язано методом Гаусса.

В формулі (31) при $\xi > 0$ підінтегральна функція містить множники $e^{-\Delta_j \xi}$, тож інтеграл по λ збігається абсолютно. При $\xi \rightarrow 0$ напруження $\sigma_\rho(1, \xi)$ має степеневу особливість кутової точки, що й невідома $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$. Тому значення $\sigma_\rho(1, \xi)$ обчислювались для $\xi > 0$.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунки амплітуд переміщення (28) плоскої грані та нормального напруження на циліндричному включенні (31) проводилися в залежності від Ω – безрозмірної частоти коливань. Розглянуто півпростір з коефіцієнтом Пуассона $\mu = 1/3$ та відповідно $\gamma = -0.31001$. Для середовища з $\mu = 1/3$ має місце зв'язок між швидкостями хвиль $c_1 = 2c_2$.

Таким чином функції (14) мають форму $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega^2} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}\Omega^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - \Omega^2}$.

Застосовані позначення на осях: q – інтенсивність навантаження, зосередженого по колу радіуса b . Обидва стискальні навантаження: зосереджене по колу (21) і рівномірно розподілене по кільцю (22) мають однакову сумарну силу $F = 2\pi b q$; a – радіус кола жорсткого включення; $b/a = 2$.

На рис. 1, 2 наведено амплітуду прогину (28) грані в низькочастотному діапазоні. В усіх випадках виконується умова $W(1, \xi) = 0$ жорсткого зчеплення з включенням. Включення істотно зменшує прогин грані. При $\Omega = 0.1$ на відстані $\rho = 6$ прогин з

включенням приблизно в 3.5 рази менший, ніж у півпросторі без включення (пунктир), а біля включення відмінність принципова. Криві без включення при $\Omega \rightarrow 0$ збігаються з розв'язком задачі Буссінеска (29). Під зосередженою силою прогин має логарифмічну особливість. Розподілений по кільцю тиск дає гладкий прогин з максимумом при $\rho \approx 1.7$, всередині області навантаження. Зі зростанням частоти в межах $\Omega \leq 1$ картина змінюється мало, тобто поле залишається квазістатичним.

У високочастотному діапазоні (рис. 3, 4) поле має хвильовий характер. Для зосередженої сили між включенням і лінією навантаження $1 < \rho < 2$ утворюється система стоячих хвиль, обумовлена відбиттям поверхневої хвилі Релея від включення. За лінією навантаження амплітуда змінюється повільно. При $\Omega = 10$ на відстані $\rho = 6$ вона перевищує амплітуду для півпростору без включення: включення стає вторинним джерелом хвиль. Розподілений тиск за межами області навантаження збуджує значно слабші хвилі, ніж зосереджена сила з однаковою сумарною силою: при $\Omega = 5$ приблизно в 5 разів, що пояснюється інтерференцією хвиль, що збуджуються різними ділянками навантаженої зони.

На рис. 5, 6 наведено амплітуди дотичного (23) та нормального напружень (31) на поверхні включення. Обидва напруження мають особливість у кутовій точці $\xi = 0$ і згасають з глибиною. На низьких частотах рівномірний тиск, прикладений впритул до включення, дає значно більшу концентрацію дотичного напруження навколо кутової точки, ніж зосереджена по колу сила (при $\Omega = 0.5$ приблизно втричі). На високих частотах уздовж включення формуються хвилі напружень з максимумом на глибині $\xi \approx 0.2 \div 1$.

Рисунок 7 показує, яку частку прикладеної сили сприймає включення (24). У квазістатичному режимі ($\Omega \rightarrow 0$) включення сприймає близько 80% сили для зосередженого навантаження і близько 87% для розподіленого. Для зосередженої сили ця частка слабо залежить від частоти і зростає до ≈ 1.1 при $\Omega \rightarrow 20$ за рахунок інерційних ефектів. Для розподіленого тиску ця частка різко спадає з частотою і має мінімум при $\Omega \approx 5.8; 11.7; 17.5$. Ці значення відповідають умові $k_R(b-a) = 2\pi n$, тобто на ширині навантаженої ділянки вкладається ціле число довжин хвиль Релея. Отже, розподілене навантаження ефективно фільтрує частоти, на яких воно передає зусилля на включення.

На рис. 8 показано фактичне положення грані $w(\rho, 0, t) = |W| \cos(\omega t - \varphi)$ для зосередженої сили при $\Omega = 5$ у три моменти часу. Прогин спрямовано вглиб півпростору, а сила q діє при $\rho = b/a = 2$. Зовні від лінії навантаження форми грані з часом зсуваються праворуч: від навантаження поширюється хвиля Релея з довжиною $2\pi a / (1.072\Omega)$, а обвідна $\pm |W|$ майже стала. Між включенням і лінією навантаження хвиля відбивається від включення. Утворюється стояча хвиля: обвідна має вузли, а точка $\rho = 1$ залишається нерухомою.

Жорстке включення, зчеплене з півпростором, працює як анкер: у квазістатичі воно сприймає $80 \div 87\%$ прикладеної сили і в кілька разів зменшує осідання грані поблизу себе. Водночас біля кутової точки (виходу включення на грань) виникає напруження, яке може бути джерелом руйнування зчеплення. Особливо небезпечним є навантаження, прикладене впритул до включення. На високих частотах включення відбиває поверхневі хвилі Релея і стає вторинним джерелом хвиль, а частка зусилля, що передається на включення від розподіленого навантаження, різко залежить від співвідношення ширини навантаженої ділянки та довжини хвилі Релея.

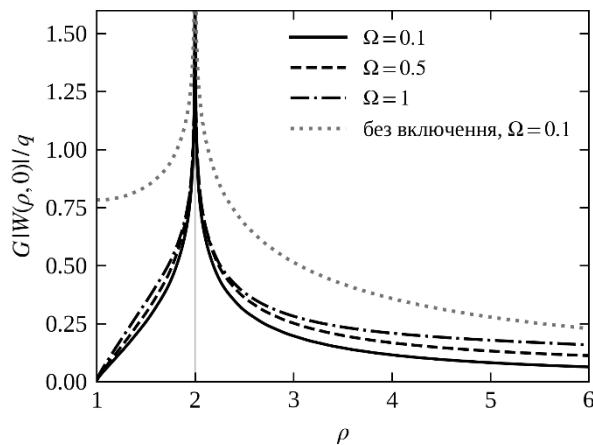


Рис. 1. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, зосереджена по колу сила; пунктир – півпростір без включення, $\Omega = 0.1$

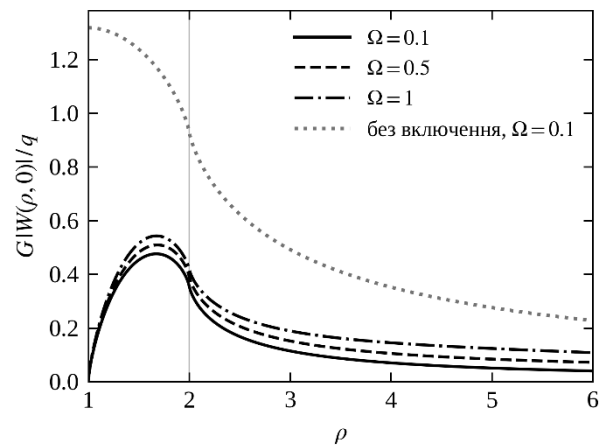


Рис. 2. $|W(\rho, 0)|$ для рівномірного тиску на кільцевій ділянці $a < r < b$

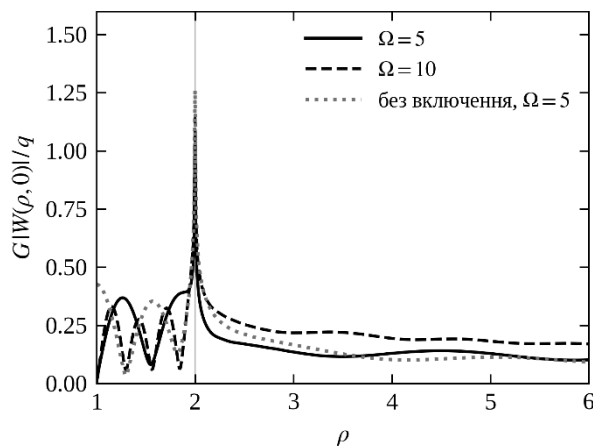


Рис. 3. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, зосереджена по колу сила; пунктир – без включення, $\Omega = 5$

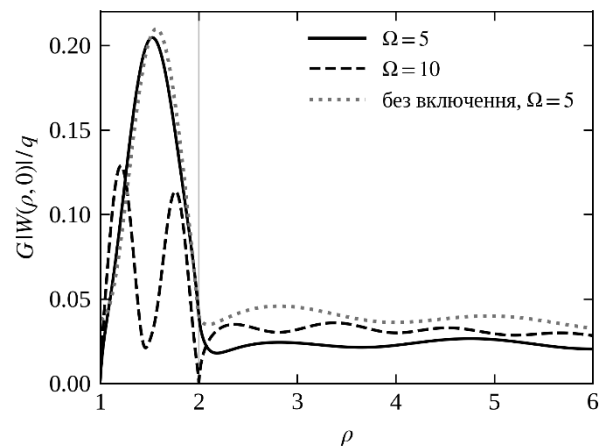


Рис. 4. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, рівномірний тиск на кільцевій ділянці $a < r < b$

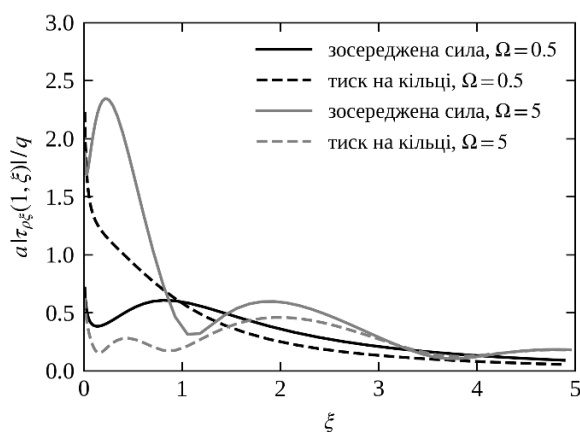


Рис. 5. Амплітуда дотичного напруження $|\tau_{\rho\xi}(1, \xi)|$ на поверхні включення

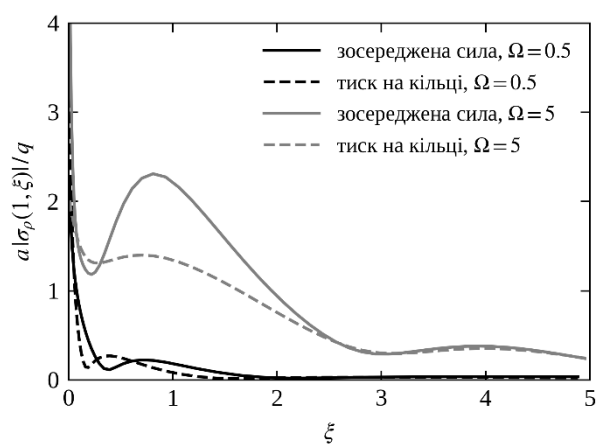


Рис. 6. Амплітуда нормального напруження $|\sigma_{\rho}(1, \xi)|$ на поверхні включення

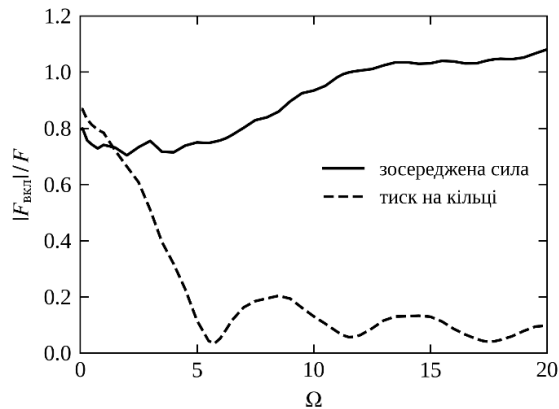


Рис. 7. Частка сумарної сили, що передається на включення $|F_{\text{вкл}}|/F$ залежно від безрозмірної частоти Ω

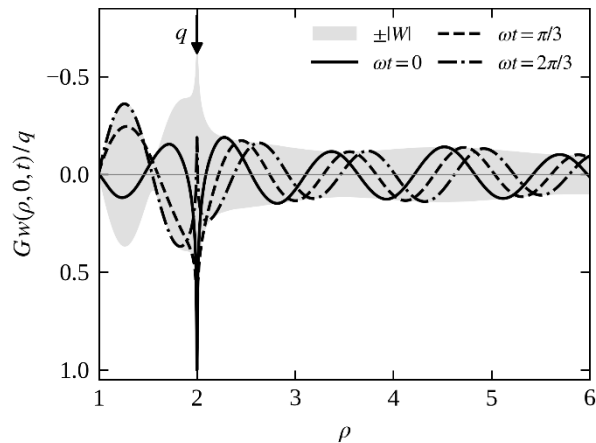


Рис. 8. Форма грані $w(\rho, 0, t) = \text{Re}[W(\rho, 0)e^{-i\omega t}]$ у різні моменти часу; зосереджена сила; $\Omega = 5$; сіра область – обвідна $\pm|W(\rho, 0)|$; вісь прогину спрямована вниз (вглиб півпростору)

6 ВИСНОВКИ

1. Побудовано наближений аналітико-чисельний розв'язок задачі про усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикальним циліндричним жорстким включенням, поверхня якого жорстко зчеплена з півпростором.

2. Застосовано інтегральне перетворення Вебера безпосередньо до рівнянь руху та крайових умов і зведено задачу до неоднорідної векторної одновимірної крайової задачі відносно трансформант переміщень. Її розв'язок побудовано методом матричного диференціального числення.

3. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння на проміжку $\xi \in [0, \infty]$ відносно невідомої функції, що має механічний зміст дотичного напруження на поверхні включення. Визначено характер особливості цієї функції в кутовій точці $\xi = 0$. Рівняння розв'язано наближено методом колокацій з чисельним інтегруванням уздовж контуру, що обходить точки розгалуження і полюс Релея відповідно до умов випромінювання.

4. Досліджено амплітуди коливань плоскої грані півпростору, а також дотичне і нормальне напруження на циліндричній поверхні включення. Розглянуто два види нормального навантаження на грані, зосереджене по колу і рівномірно розподілене на прилеглий до включення кільцевій ділянці, в широкому діапазоні безрозмірної частоти коливань.

5. Для півпростору без включення розв'язок збігається з розв'язком задачі Лемба, а при $\Omega \rightarrow 0$ переходить у розв'язок статичної задачі Буссінеска.

6. Жорстке включення істотно зменшує прогин грані: у квазістатичному режимі на відстані шести радіусів включення прогин приблизно в 3.5 раза менший, ніж у півпросторі без включення. Включення сприймає близько 80% прикладеної сили при навантаженні, зосередженому по колу, і близько 87% при розподіленому навантаженні.

7. У височастотному діапазоні між включенням і лінією навантаження утворюються стоячі хвилі Релея, а саме включення стає вторинним джерелом поверхневих хвиль. Розподілене навантаження збуджує за межами навантаженої ділянки значно слабші хвилі, ніж зосереджене з тією самою сумарною силою: при $\Omega = 5$ приблизно в 5 разів.

8. Напруження на поверхні включення мають інтегровану особливість у кутовій точці і згасають з глибиною. На низьких частотах навантаження, прикладене впритул

до включення, дає приблизно втричі більшу концентрацію дотичного напруження біля кутової точки, ніж зосереджене по колу. Цю концентрацію слід враховувати як можливе джерело руйнування зчеплення.

9. Частка сили, що передається на включення від зосередженого навантаження, слабо залежить від частоти. Від розподіленого навантаження вона різко спадає зі зростанням частоти і має мінімуми при $k_R(b-a) = 2\pi n$, тобто коли на ширині навантаженої ділянки вкладається ціле число довжин хвиль Релея. Отже, розподілене навантаження зумовлює виражену частотну залежність передачі зусилля на включення.

Запропонований підхід можна застосувати під час розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на поверхні включення.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Пауан, 1999. 133 с.
2. Babych S., Yaretskaya N., Dehtyar S. Contact Problem for Half-Spaces and Elastic Cylinder with Initial (Residual) Stresses. *Int. Applied Mechanics*. 2023. 59. P. 1-13.
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01234-w>
3. Zhupanska O.I., Ulitko A.F. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *J. of the Mech. and Physics of Solids*. 2005. 53(5). P. 975-999.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.002>
4. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a halfspace with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. of Enterprise Technologies*. 2018. 4(7). P. 43-50.
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
5. Yang Z., Jiang G., Tang H., Sun B., Yang Y. Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. 24(1). <https://doi.org/10.1177/1081286517739520>
6. Zhao M., van Dalen K.N., Barbosa J.M., Metrikine A.V. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space. *Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics*. 2017. P. 369–388.
https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0_35
7. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
8. Kit H.S., Mykhas'kiv V.V., Khaj O.M. Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method. *J. Appl. Math. Mech*. 2002. 66(5). P. 817-824. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2)
9. Coşkun İ., Engin H., Özmütlu A. Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity. *Shock and Vibration*. 2011. 18(6), P. 827-838.
<https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0602>
10. Eskandari-Ghadi M., Mahmoodian M. Analytical Solution of Time-Harmonic Torsional Vibration of a Cylindrical Cavity in a Half-Space. *World Academy of Science, Engineering and Technology Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2012. 6 (1). P. 184-189.
<https://doi.org/10.5281/ZENODO.1061873>

11. Selvadurai A.P.S., Rajapakses R.K.N.D. On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. *Int. J. Solids Structures*. 1985. 21(12). P. 1213-1229.
<https://www.mcgill.ca/civil/files/civil/102.pdf>
12. Малиц П.Я., Приварников А. К. Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием. *Вопросы прочности и пластичности: Сб. науч. тр. Днепропетровск: Бюллетень изобретений*. 1971. С. 15-18.
13. Popov G.Ya., Vaisfel'd N.D. Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight. *Int. Appl. Mech.* 2014. 50(6). P. 627-636. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>
14. Popov G.Ya., Protserov Yu.S. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.* 2016. 212(1). P. 67-82.
<https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>
15. Fesenko A.A., Moyseenok A.P. Exact Solution of a Nonstationary Problem for the Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 2020. 249. P. 478-495.
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
16. Fesenko A.A. Dynamic Problem for an Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 2025. 294, 326-354. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08105-4>
17. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series, and Products* / ed. by D. Zwillinger, V. Moll. 8th ed. Amsterdam : Elsevier, 2014. 1184 p. DOI: 10.1016/C2010-0-64839-5
18. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М: Наука, 1982. 342 с.
19. Лурье А.И. *Пространственные задачи теории упругости*. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.

References

1. Popov, G.Ya., Abdymanapov, S.A., Efimov, V.V. (1999). *Funktsii i matritsy Grina odnomernykh kraevykh zadach*. [Functions and Green matrices of one-dimensional boundary value problems] (monograph). Almaty: Rauan. [in Russian]
2. Babych, S., Yaretskaya, N., Dehtyar, S. (2023). Contact Problem for Half-Spaces and Elastic Cylinder with Initial (Residual) Stresses. *Int. Applied Mechanics*. 59. 1-13.
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01234-w>
3. Zhupanska, O.I., Ulitko, A.F. (2005). Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *J. of the Mech. and Physics of Solids*. 53(5). 975-999.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.002>
4. Protsenko, V., Miroshnikov, V. (2018). Investigating a problem from the theory of elasticity for a halfspace with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. of Enterprise Technologies*. 4(7). 43-50.
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
5. Yang, Z., Jiang, G., Tang, H., Sun, B., Yang, Y. (2017). Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 24(1). <https://doi.org/10.1177/1081286517739520>
6. Zhao, M., van Dalen, K. N., Barbosa, J. M., Metrikine, A. V. (2017). Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space. *Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics*. 369-388.
https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0_35
7. Grinchenko, V.T., Meleshko, V.V. (1981). *Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh*. [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies] (monograph). Kyiv: Nauk. dumka. [in Russian]
8. Kit, H.S., Mykhas'kiv, V.V., Khaj, O.M. (2002). Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method. *J. Appl. Math. Mech.* 66(5). 817-824. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2)

9. Coşkun, İ., Engin, H., Özmutlu, A. (2011). Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity. *Shock and Vibration*. 18(6). 827-838. <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0602>
10. Eskandari-Ghadi, M., Mahmoodian, M. (2012). Analytical Solution of Time-Harmonic Torsional Vibration of a Cylindrical Cavity in a Half-Space. *World Academy of Science, Engineering and Technology Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 6(1). 184-189. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.1061873>
11. Selvadurai, A. P. S., Rajapakse, R. K. N. D. (1985). On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. *Int. J. Solids Structures*. 21(12). 1213-1229. <https://www.mcgill.ca/civil/files/civil/102.pdf>
12. Malits, P.Ya., Privarnikov, A.K. (1971). Primeneniye preobrazovaniy tipa Vebera k resheniyu zadach teorii uprugosti dlya sloistikh sred s tsilindricheskimi otverstiyami. [Application of Weber-type transforms to the solution of elasticity problems for layered media with a cylindrical cavity]. *Voprosy prochnosti i plastichnosti: Sb. nauch. tr. Dnepropetrovsk: Byulleten izobreteniy*. 15–18. [in Russian]
13. Popov, G.Ya., Vaisfel'd, N.D. (2014). Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight. *Int. Appl. Mech.* 50(6). 627-636. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>
14. Popov, G.Ya., Protserov, Yu.S. (2016). Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.* 212(1). 67-82. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>
15. Fesenko, A.A., Moyseenok, A.P. (2020). Exact Solution of a Nonstationary Problem for the Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 249. 478-495. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
16. Fesenko, A.A. (2025). Dynamic Problem for an Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 294. 326-354. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
17. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (2014). *Table of Integrals, Series, and Products* / ed. by D. Zwillinger, V. Moll. 8th ed. Amsterdam: Elsevier.
18. Popov, G.Ya. (1982). *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozkreystno k otverstiyam, razrezam, tonkim vklucheniym i podkrepleniym*. [Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusions and reinforcements] (monograph). M: Nauka. [in Russian]
19. Lur'e, A.I. (1955). *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti*. [Three-dimensional problems of the theory of elasticity] (monograph). Moscow: GITTL. [in Russian]

Фесенко Ганна Олександрівна

к.ф.-м. н., доцент

fesenko@onu.edu.ua

[ORCID: 0009-0007-1469-9165](https://orcid.org/0009-0007-1469-9165)

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
вул. Змієнка Всеволода, 2, Одеса, Україна 650001

Стаття надійшла до редакції 10.07.2026

Стаття прийнята до друку 10.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Фесенко Г.О. Усталені коливання пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням.

Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 2. С. 95-116.

For references:

A. Fesenko (2026). Steady-state oscillations of an elastic half-space with a rigid cylindrical inclusion. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 95–116.

[Усталені коливання пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-95-116) © 2026 by
[Фесенко Г.О.](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-95-116) is licensed under CC BY 4.