

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

VIII/2/2026

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Том VIII
№2
2026**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Рішення Національної ради №1162 від 26.10.2023 р.,
протокол №24; ідентифікатор медіа: R30-01810

Журнал включено до **Переліку наукових фахових видань України** згідно наказу Міністерства освіти і науки України 11.06.2026 р. № 928 (категорія «Б»)

М55 **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2026. — Том VIII. — №2. — 130 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- Е7 Математика;
- F1 Прикладна математика.

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №13 від 14.09.2026 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)7234937, (048)7323402, (048)7298563
E-mail: mmm@odaba.edu.ua
Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2026

Редакційна колегія:

Головний редактор:

Киосак Володимир Анатолійович, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

ORCID ID: [0000-0002-7433-6709](https://orcid.org/0000-0002-7433-6709)

Scopus Author ID: [25960165900](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57195062112)

ResearcherID Web of Science: [GBK-3147-2022](https://orcid.org/0000-0002-7433-6709)

Заступник головного редактора:

Крутий Юрій Сергійович, д.т.н., проф., завідувач кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

ORCID ID: [0000-0001-7105-3087](https://orcid.org/0000-0001-7105-3087)

Scopus Author ID: [57195062112](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57195062112)

ResearcherID Web of Science: [W-7922-2019](https://orcid.org/0000-0001-7105-3087)

Відповідальний секретар:

Лесечко Олександр Васильович, к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

ORCID ID: [0000-0002-2352-6174](https://orcid.org/0000-0002-2352-6174)

Scopus Author ID: [6506592446](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=6506592446)

ResearcherID Web of Science: [AAF-1793-2019](https://orcid.org/0000-0002-2352-6174)

Бернацька Юлія, к.ф.-м.н., доц., дослідник кафедри математики Університету Коннектикуту, Сторрс, США;

ORCID ID: [0000-0002-8175-8846](https://orcid.org/0000-0002-8175-8846)

Scopus Author ID: [6506237077](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=6506237077)

ResearcherID Web of Science: [K-8183-2014](https://orcid.org/0000-0002-8175-8846)

Болотов Дмитро Валерійович, д.ф.-м.н., старший дослідник, провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б.І. Веркіна НАН України, Харків, Україна;

ORCID ID: [0000-0002-8542-9695](https://orcid.org/0000-0002-8542-9695)

Scopus Author ID: [8884535600](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=8884535600)

ResearcherID Web of Science: [MYS-7452-2025](https://orcid.org/0000-0002-8542-9695)

Клінгенберг Вільгельм, доктор філософії, доцент кафедри математичних наук Даремського університету, Дарем, Англія;

ORCID ID: [0000-0001-7876-579X](https://orcid.org/0000-0001-7876-579X)

Scopus Author ID: [57202447306](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57202447306)

ResearcherID Web of Science: [DBB-5851-2022](https://orcid.org/0000-0001-7876-579X)

Кононов Юрій Микитович, д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем Інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слов'янськ, Україна;

ORCID ID: [0000-0002-1609-0253](https://orcid.org/0000-0002-1609-0253)

Scopus Author ID: [57226233019](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57226233019)

ResearcherID Web of Science: [KBW-3993-2024](https://orcid.org/0000-0002-1609-0253)

Мікуліч Олена Аркадіївна, д.т.н., проф., завідувачка кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;

ORCID ID: [0000-0003-4522-596X](https://orcid.org/0000-0003-4522-596X)

Scopus Author ID: [57112445700](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57112445700)

ResearcherID Web of Science: [U-8810-2017](https://orcid.org/0000-0003-4522-596X)

Ніколаєвські Юрій, доктор філософії, доцент кафедри математики і статистики Університету Ла Тробе, Мельбурн, Австралія;

ORCID ID: [0000-0002-9528-1882](https://orcid.org/0000-0002-9528-1882)

Scopus Author ID: [6602777867](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=6602777867)

ResearcherID Web of Science: [HMY-0512-2023](https://orcid.org/0000-0002-9528-1882)

Пивоварчик Вячеслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики і статистики
Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К.Д. Ушинського, Одеса, Україна;
ORCID ID: [0000-0002-4649-2333](https://orcid.org/0000-0002-4649-2333)
Scopus Author ID: [6701611895](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=6701611895)
ResearcherID Web of Science: [I-2182-2015](https://orcid.org/I-2182-2015)

Плотніков Андрій Вікторович, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
ORCID ID: [0000-0002-7864-0732](https://orcid.org/0000-0002-7864-0732)
Scopus Author ID: [8613278800](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=8613278800)
ResearcherID Web of Science: [U-2406-2017](https://orcid.org/U-2406-2017)

Пришляк Олександр Олегович, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри комп'ютерних методів механіки і процесів керування Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
ORCID ID: [0000-0002-7164-807X](https://orcid.org/0000-0002-7164-807X)
Scopus Author ID: [57212551366](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57212551366)
ResearcherID Web of Science: [GQH-1510-2022](https://orcid.org/GQH-1510-2022)

Савченко Олександр Григорович, д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
ORCID ID: [0000-0003-4687-5542](https://orcid.org/0000-0003-4687-5542)
Scopus Author ID: [33467826600](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=33467826600)
ResearcherID Web of Science: [AAD-9326-2019](https://orcid.org/AAD-9326-2019)

Станкевич Володимир Зенонович, д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів, Україна;
ORCID ID: [0000-0003-3471-6608](https://orcid.org/0000-0003-3471-6608)
Scopus Author ID: [7801674789](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=7801674789)
ResearcherID Web of Science: [PKR-1808-2026](https://orcid.org/PKR-1808-2026)

Сур'янінов Микола Георгійович, д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна.
ORCID ID: [0000-0003-2592-5221](https://orcid.org/0000-0003-2592-5221)
Scopus Author ID: [57201724037](https://scopus.org/authid/detail/authid?cid=57201724037)
ResearcherID Web of Science: [AEV-0397-2022](https://orcid.org/AEV-0397-2022)

Видавничий редактор: Теорло Наталя Анатоліївна, асистент кафедри інформаційних технологій та прикладної математики

Технічний редактор: Гедулян Сергій Іванович, к.т.н., доц. кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц., завідувачка кафедри мовної підготовки та міжнародних комунікацій

The composition of the editorial board:

Chief Editor:

Volodymyr Kiosak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0002-7433-6709](https://orcid.org/0000-0002-7433-6709)

Scopus Author ID: [25960165900](https://scopus.org/authid/25960165900)

ResearcherID Web of Science: [GBK-3147-2022](https://orcid.org/GBK-3147-2022)

Deputy Chief Editor:

Yurii Krutii, Doctor of Technical Science, Professor, Head of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0001-7105-3087](https://orcid.org/0000-0001-7105-3087)

Scopus Author ID: [57195062112](https://scopus.org/authid/57195062112)

ResearcherID Web of Science: [W-7922-2019](https://orcid.org/W-7922-2019)

Assistant Editor:

Oleksandr Lesechko, Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0002-2352-6174](https://orcid.org/0000-0002-2352-6174)

Scopus Author ID: [6506592446](https://scopus.org/authid/6506592446)

ResearcherID Web of Science: [AAF-1793-2019](https://orcid.org/AAF-1793-2019)

Julia Bernatska, Ph.D., Associate Professor, Associate Research Scholar in the Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, US.;

ORCID ID: [0000-0002-8175-8846](https://orcid.org/0000-0002-8175-8846)

Scopus Author ID: [6506237077](https://scopus.org/authid/6506237077)

ResearcherID Web of Science: [K-8183-2014](https://orcid.org/K-8183-2014)

Dmytro Bolotov, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientist, Senior Researcher of Department of differential equations and geometry, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0002-8542-9695](https://orcid.org/0000-0002-8542-9695)

Scopus Author ID: [8884535600](https://scopus.org/authid/8884535600)

ResearcherID Web of Science: [MYS-7452-2025](https://orcid.org/MYS-7452-2025)

Wilhelm Klingenberg, Ph.D., Associate Professor in the Department of Mathematical Sciences, Durham University, Durham, England;

ORCID ID: [0000-0001-7876-579X](https://orcid.org/0000-0001-7876-579X)

Scopus Author ID: [57202447306](https://scopus.org/authid/57202447306)

ResearcherID Web of Science: [DBB-5851-2022](https://orcid.org/DBB-5851-2022)

Yurii Kononov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0002-1609-0253](https://orcid.org/0000-0002-1609-0253)

Scopus Author ID: [57226233019](https://scopus.org/authid/57226233019)

ResearcherID Web of Science: [KBW-3993-2024](https://orcid.org/KBW-3993-2024)

Olena Mikulich, Doctor of Technical Science, Professor, Head of the Department Applied Mathematics and Mechanics, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;

ORCID ID: [0000-0003-4522-596X](https://orcid.org/0000-0003-4522-596X)

Scopus Author ID: [57112445700](https://scopus.org/authid/57112445700)

ResearcherID Web of Science: [U-8810-2017](https://orcid.org/U-8810-2017)

Yuri Nikolayevsky, Ph.D., Associate Professor in the Department of Mathematics and Statistics La Trobe University, Melbourne, Australia;

ORCID ID: [0000-0002-9528-1882](https://orcid.org/0000-0002-9528-1882)

Scopus Author ID: [6602777867](https://scopus.org/authid/6602777867)

ResearcherID Web of Science: [HMV-0512-2023](https://orcid.org/HMV-0512-2023)

Vyacheslav Pivovarchik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics and Statistics Department, K.D. Ushynsky South-Ukrainian National Pedagogical University, Odesa, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0002-4649-2333](https://orcid.org/0000-0002-4649-2333)
Scopus Author ID: [6701611895](https://scopus.org/authid/6701611895)
ResearcherID Web of Science: [I-2182-2015](https://orcid.org/I-2182-2015)

Andrej Plotnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0002-7864-0732](https://orcid.org/0000-0002-7864-0732)
Scopus Author ID: [8613278800](https://scopus.org/authid/8613278800)
ResearcherID Web of Science: [U-2406-2017](https://orcid.org/U-2406-2017)

Alexandr Prishlyak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Computer Methods of Mechanics and Control Processes, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0002-7164-807X](https://orcid.org/0000-0002-7164-807X)
Scopus Author ID: [57212551366](https://scopus.org/authid/57212551366)
ResearcherID Web of Science: [GQH-1510-2022](https://orcid.org/GQH-1510-2022)

Oleksandr Savchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0003-4687-5542](https://orcid.org/0000-0003-4687-5542)
Scopus Author ID: [33467826600](https://scopus.org/authid/33467826600)
ResearcherID Web of Science: [AAD-9326-2019](https://orcid.org/AAD-9326-2019)

Volodymyr Stankevych, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mechanics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0003-3471-6608](https://orcid.org/0000-0003-3471-6608)
Scopus Author ID: [7801674789](https://scopus.org/authid/7801674789)
ResearcherID Web of Science: [PKR-1808-2026](https://orcid.org/PKR-1808-2026)

Mykola Suryaninov, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
ORCID ID: [0000-0003-2592-5221](https://orcid.org/0000-0003-2592-5221)
Scopus Author ID: [57201724037](https://scopus.org/authid/57201724037)
ResearcherID Web of Science: [AEV-0397-2022](https://orcid.org/AEV-0397-2022)

Publishing Editor: Natalia Teorlo, Assistant Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics

Technical Editor: Serhii Hedulian, Ph.D., Associate Professor of the Department of Processes and Apparatuses in Building Materials Technology

Linguistic Adviser in English language: Yanina Marianko, Ph.D in Philology, Associate Professor, Head of the Department of Language Competence and International Communication Department of Foreign Languages.

ЗМІСТ

Сясєв А.В.

Математичне моделювання процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккати..... 7

Кашкевич С.О., Дехтяренко А.Т., Брановицька І.В., Голего Н.М.

Аналіз просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень 27

Нечипорук О.П., Апенько О.В., Бузун О.Г., Тупота Є.В.

Розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем..... 38

Бекшасєв С.Я.

Щодо втрати стійкості розтягнутого стрижня (*англійською*)..... 50

Назаренко О.А., Стехун А.О., Васильєв О.Б.

Задача дифракції ударної хвилі на жорсткому напівсферичному включенні (*англійською*)..... 61

.

Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О.

Збурені рухи стабілізованого обертанням твердого тіла з рухомою масою..... 77

Казмерчук А.І.

Розв'язність системи квазілінійних рівнянь першого порядку з трикутною матрицею потоку..... 87

Фесенко Г.О.

Усталені коливання пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням... 95

Соловйов А.

Про кількість незалежних компонент кососиметричного тензора (*англійською*)..... 117

CONTENT

A. Siasiev

Mathematical modeling of thermomechanical hardening in deformable solids based on a generalized Riccati equation (*in Ukrainian*)..... 7

S. Kashkevych, A. Dekhtiarenko, I. Branovytska, N. Holeho

Analysis of the spatio-temporal structure of multidimensional information processes under incomplete observations (*in Ukrainian*)..... 27

O. Nechyporuk, N. Apenko, O. Buzun, Y. Tupota

Development of a mathematical method for predicting the states of chaotic dynamical systems (*in Ukrainian*)..... 38

S. Bekshaev

On the buckling of a rod under tensile force 50

O. Nazarenko, A. Stekhun, A. Vasiliev

The problem of shock wave diffraction by a rigid hemispherical inclusion 61

D. Leshchenko, T. Kozachenko

Perturbed motions of spinstabilized rigid body with a moving mass (*in Ukrainian*)..... 77

A. Kazmerchuk

Solvability of a system of first-order quasilinear equations with a triangular flux matrix (*in Ukrainian*)..... 87

A. Fesenko

Steady-state oscillations of an elastic half-space with a rigid cylindrical inclusion (*in Ukrainian*)..... 95

A. Soloviov

On the number of independent components a skew-symmetric tensor..... 117

УДК 539.3:517.938:519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО ЗМІЦНЕННЯ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ

Сясєв А.В.¹

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: У статті запропоновано математичну модель процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, побудовану на основі узагальненого рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розроблення компактних математичних моделей, здатних адекватно описувати еволюцію процесів зміцнення матеріалів за одночасної дії механічних навантажень і температурних впливів та забезпечувати ефективне проведення чисельних досліджень. Метою роботи є побудова математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення на основі узагальненого рівняння Ріккаті, дослідження її якісних властивостей та розроблення алгоритму чисельного розв'язування.

Побудову моделі здійснено шляхом локальної квадратичної апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації, що дозволило отримати неавтономне рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами, які мають безпосередню фізичну інтерпретацію. Проведено якісний аналіз моделі, досліджено вплив її параметрів на характер еволюції функції стану та розроблено алгоритм чисельного інтегрування на основі класичного методу Рунге–Кутти четвертого порядку.

Виконано чисельний експеримент, який підтвердив працездатність запропонованої математичної моделі та узгодженість результатів якісного аналізу з даними чисельного моделювання. Показано, що зміна коефіцієнтів узагальненого рівняння Ріккаті дозволяє описувати різні режими еволюції процесу термомеханічного зміцнення, а найбільший вплив на характер розв'язку має нелінійний коефіцієнт, який визначає інтенсивність нелінійного саморегулювання процесу.

Наукова новизна роботи полягає у побудові узагальненої математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, у якій рівняння Ріккаті зі змінними коефіцієнтами отримано як наслідок локальної квадратичної апроксимації фізично обґрунтованого балансу між процесами накопичення зміцнення та релаксації. Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі для аналізу впливу технологічних параметрів на процес термомеханічного зміцнення, проведення параметричних досліджень та прогнозування еволюції функції стану під час комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: математичне моделювання, термомеханічне зміцнення, узагальнене рівняння Ріккаті, задача Коші, метод Рунге–Кутти, чисельне моделювання, нелінійні диференціальні рівняння, параметричний аналіз.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMOMECHANICAL HARDENING IN DEFORMABLE SOLIDS BASED ON A GENERALIZED RICCATI EQUATION

A. Siasiev¹

¹*Oles Honchar Dnipro National University*

Abstract: The paper proposes a mathematical model of the thermomechanical hardening process in deformable solids based on a generalized Riccati equation with time-dependent coefficients. The relevance of the study is determined by the need for compact mathematical models capable of adequately describing the evolution of hardening processes under coupled mechanical loading and thermal effects while avoiding the complexity of large-scale multiparameter thermomechanical models. The aim of the study is to develop a mathematical model of thermomechanical hardening based on a generalized Riccati equation, investigate its qualitative properties, and develop an efficient numerical solution algorithm.

The proposed model is derived using a local quadratic approximation of generalized hardening accumulation and relaxation functions, resulting in a non-autonomous Riccati equation whose coefficients possess a clear physical interpretation. A qualitative analysis of the model is performed to investigate the influence of the governing parameters on the evolution of the state function and to determine the conditions leading to stabilization of the hardening process. The initial value problem is solved numerically using the classical fourth-order Runge–Kutta method, which provides high computational accuracy and efficiency for parametric studies.

A series of numerical experiments confirms the applicability of the proposed mathematical model and demonstrates good agreement between the theoretical analysis and numerical simulations. The results show that variations in the coefficients of the generalized Riccati equation make it possible to reproduce different evolution regimes of the thermomechanical hardening process, whereas the nonlinear coefficient has the greatest influence on the solution behavior by controlling the intensity of nonlinear self-regulation.

The scientific novelty of the study consists in deriving a generalized Riccati equation from a physically justified balance between hardening accumulation and relaxation processes using a local quadratic approximation rather than introducing it phenomenologically. The proposed model can be used for parametric analysis, numerical simulation, and prediction of thermomechanical hardening processes under various technological operating conditions.

Keywords: mathematical modeling, thermomechanical hardening, generalized Riccati equation, initial value problem; Runge–Kutta method, numerical simulation, nonlinear differential equations, parametric analysis.

1 ВСТУП

Термомеханічні процеси, що супроводжують пластичне деформування, кристалізацію, наплавлення, термічне зміцнення та інші технологічні операції, характеризуються складною взаємодією температурних і механічних полів. Зміна температури впливає на механічні властивості матеріалу, тоді як процеси деформування, у свою чергу, змінюють тепловий стан тіла. Цей взаємозв'язок формує остаточні напруження, деформації та структуру матеріалу. Усе це безпосередньо впливає на якість і експлуатаційні властивості готових виробів [1–8].

Сучасний розвиток обчислювальної механіки значно розширив можливості дослідження зв'язаних термомеханічних процесів. Разом із тим більшість відомих моделей орієнтована на розв'язування окремих прикладних задач і нерідко базується на значній кількості припущень щодо фізичних властивостей матеріалу, умов навантаження або характеру теплообміну. Через такі обмеження розробка універсальних математичних моделей, які б адекватно описували еволюцію процесів зміцнення в широкому діапазоні технологічних режимів, залишається актуальною науковою задачею [4–8].

Одним із перспективних напрямів розвитку таких моделей є використання нелінійних диференціальних рівнянь. Вони дозволяють природно врахувати, як між собою взаємодіють конкуруючі процеси: накопичення та релаксація структурних змін. Особливий інтерес становить узагальнене рівняння Ріккаті, математична структура якого забезпечує достатню гнучкість для опису широкого класу еволюційних процесів, а також створює передумови для проведення якісного аналізу та ефективного чисельного моделювання.

В останні роки значну увагу приділено розвитку моделей, що враховують взаємодію температурних і механічних факторів у задачах термопружності, термопластичності та чисельного моделювання технологічних процесів [4–8]. Водночас питання побудови компактних нелінійних моделей, придатних для аналізу процесів термомеханічного зміцнення деформованих твердих тіл із використанням узагальненого рівняння Ріккаті, висвітлено недостатньо. Це стосується насамперед вибору узагальненої структури моделі, дослідження її властивостей та створення алгоритмів чисельного розв'язування, придатних для практичного застосування.

Це дослідження є логічним продовженням попередніх робіт автора, присвячених математичному моделюванню процесів кристалізації, формування деталей методами нарощування матеріалу, а також побудові нелінійних аналітичних моделей технологічних процесів [9–12]. На відміну від зазначених досліджень, у цій роботі основну увагу зосереджено на побудові узагальненого рівняння Ріккаті для опису процесів термомеханічного зміцнення, дослідженні його якісних властивостей та перевірці працездатності запропонованого підходу за допомогою чисельного експерименту.

Запропонований підхід поєднує фізично обґрунтовану постановку задачі, побудову узагальненої математичної моделі, її якісний аналіз і чисельну реалізацію. Така послідовність дає змогу не лише описати характер еволюції процесу зміцнення, а й оцінити вплив визначальних параметрів моделі на перебіг досліджуваного процесу, що є важливим як для подальшого розвитку математичних моделей, так і для їх практичного використання під час дослідження сучасних технологій обробки матеріалів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідження процесів термомеханічного деформування та зміцнення деформівних твердих тіл ґрунтуються на класичних положеннях термомеханіки, сформульованих у фундаментальних працях [1–3]. Розроблені в них моделі заклали теоретичну основу опису взаємодії температурних і механічних полів та визначили напрями подальшого розвитку узагальнених теорій термопружності. Попри значний часовий проміжок від моменту їх появи, ці роботи й сьогодні залишаються базовими для побудови математичних моделей зв'язаних термомеханічних процесів.

Подальший розвиток теорії пов'язаний із побудовою модифікованих моделей, які дозволяють враховувати скінченну швидкість поширення теплових збурень, часові затримки теплопереносу, нелокальні ефекти та інші фізичні особливості поведінки матеріалів. Узагальнення класичних моделей стали предметом численних сучасних досліджень, у яких особлива увага приділяється математичній коректності моделей, їх фізичній інтерпретації та можливостям практичного застосування [4–6]. Використання таких моделей істотно розширило можливості дослідження процесів, для яких класичні співвідношення виявляються недостатньо точними.

Паралельно активно розвиваються методи чисельного моделювання складних термомеханічних процесів. Сучасні обчислювальні підходи дозволяють аналізувати напружено-деформований стан тіл складної геометрії, досліджувати вплив неоднорідності матеріалів, локальних дефектів та контактної взаємодії на результати розрахунків [7, 8, 14–17]. Застосування високопродуктивних чисельних методів значно розширило можливості інженерного аналізу, однак у більшості випадків математичні моделі залишаються достатньо громіздкими, містять значну кількість параметрів і орієнтовані на вузькі класи практичних задач.

Окремий напрям досліджень становить математичне моделювання технологічних процесів, у яких термічні та механічні явища тісно взаємодіють між собою. До таких процесів належать кристалізація матеріалів, формування виробів методами нарощування, локальне термічне зміцнення та інші сучасні технології. У роботах авторів [9–12] розроблено математичні моделі окремих технологічних процесів, досліджено взаємний вплив температурних і механічних полів, запропоновано підходи до побудови нелінійних аналітичних моделей та алгоритмів їх чисельної реалізації. Отримані результати підтвердили доцільність використання узагальнених нелінійних співвідношень для опису еволюції процесів, однак кожна із запропонованих моделей була орієнтована на конкретний клас задач.

Аналіз сучасних публікацій показує, що переважна більшість існуючих моделей будується або на основі детальних систем рівнянь термомеханіки, які потребують значних обчислювальних ресурсів, або на спрощених емпіричних залежностях, область застосування яких є обмеженою [4–8, 13–17]. Унаслідок цього виникає потреба у побудові математичної моделі, яка, з одного боку, зберігала б фізичний зміст досліджуваних процесів, а з іншого – була б достатньо компактною для проведення якісного аналізу, чисельного моделювання та дослідження впливу основних параметрів.

Ефективним засобом для подолання вказаних труднощів є математичний інструментарій узагальненого рівняння Ріккати, покладений в основу опису еволюційних термомеханічних процесів. Його нелінійність забезпечує адекватне відтворення взаємопов'язаних явищ накопичення та релаксації напружень, гарантує універсальність розрахунків і відкриває можливості для застосування новітніх методів чисельного аналізу.

Таким чином, аналіз літературних джерел свідчить, що, незважаючи на значний розвиток теорії термомеханіки та чисельного моделювання зв'язаних процесів, задача

побудови узагальненої математичної моделі термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, ґрунтованої на рівнянні Ріккати зі змінними коефіцієнтами, залишається актуальною. Саме розв'язанню цієї проблеми присвячено подане дослідження.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розроблення математичної моделі процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами, дослідження її якісних властивостей та розроблення алгоритму чисельного розв'язування для аналізу еволюції процесу за різних режимів навантаження.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- сформулювати фізичну постановку задачі та визначити основні фактори, що характеризують процес термомеханічного зміцнення;
- побудувати математичну модель досліджуваного процесу з урахуванням взаємодії температурних і механічних полів;
- отримати узагальнене рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами, яке описує еволюцію процесу зміцнення;
- провести якісний аналіз запропонованої моделі та встановити вплив її параметрів на характер розв'язків;
- розробити алгоритм чисельного розв'язування побудованої задачі та дослідити його обчислювальні властивості;
- виконати серію чисельних експериментів, проаналізувати отримані результати та оцінити можливості практичного застосування запропонованої моделі.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Фізична постановка задачі

Процес термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл є результатом одночасної дії температурних і механічних факторів, що взаємно впливають один на одного протягом усього технологічного циклу. Під час локального нагрівання, охолодження або пластичного деформування в матеріалі відбуваються структурні зміни, які супроводжуються накопиченням внутрішніх напружень, перерозподілом енергії та зміною фізико-механічних властивостей. При цьому інтенсивність цих процесів залежить не лише від температури чи рівня навантаження окремо, а й від їх спільної дії протягом усього технологічного циклу.

Розглядатимемо однорідне деформівне тверде тіло, для якого процес зміцнення описується узагальненою характеристикою стану. Такий підхід не пов'язує модель з конкретною технологією та дозволяє використовувати її для аналізу широкого класу процесів, серед яких локальне термічне зміцнення, поверхнева обробка, кристалізація, адитивне формування виробів та інші технології, у яких визначальну роль відіграє взаємодія температурного і механічного полів.

Для побудови математичної моделі приймаються такі припущення:

- матеріал розглядається як суцільне деформівне середовище;
- температурне та механічне поля змінюються неперервно в часі;
- зовнішнє навантаження і температурний режим можуть бути довільними функціями часу;
- процес зміцнення супроводжується одночасною дією механізмів накопичення структурних змін та їх релаксації;
- локальні фізичні процеси можуть бути описані інтегральною характеристикою стану матеріалу.

Останнє припущення є принциповим для подальшої побудови моделі. Замість опису окремих фізичних величин розглядатимемо узагальнену функцію $y(t)$, яка характеризує поточний рівень термомеханічного зміцнення матеріалу. Величина $y(t)$ не ототожнюється з конкретною експериментально вимірюваною характеристикою. Вона є інтегральним параметром, що відображає сукупний вплив температурних, силових та структурних факторів на стан матеріалу.

На відміну від традиційних моделей, у яких основна увага приділяється безпосередньому опису температурних або механічних полів, запропонований підхід базується на дослідженні еволюції функції стану $y(t)$. Це дозволяє перейти від аналізу окремих фізичних процесів до побудови узагальненої моделі, придатної для різних технологічних режимів.

З фізичної точки зору зміна функції $y(t)$ визначається взаємодією двох протилежно спрямованих процесів. Перший пов'язаний із накопиченням структурних змін, що приводять до підвищення рівня зміцнення матеріалу. Другий характеризує процеси релаксації, які зменшують досягнутий рівень зміцнення внаслідок теплового впливу, структурної перебудови або зміни режиму навантаження.

Саме взаємодія та протидія цих процесів визначає характер еволюції стану матеріалу. Тому побудова математичної моделі повинна ґрунтуватися не на емпіричному виборі конкретного диференціального рівняння, а на формалізації фізичного балансу між швидкостями накопичення зміцнення та його релаксації. Такий підхід дозволяє отримати математичну модель як наслідок фізичної постановки задачі, а не як початкове припущення.

Математична постановка задачі

Для опису технологічного процесу введемо вектор керувальних параметрів $\mathbf{u}(t) = (T(t), \sigma(t), \dot{\epsilon}(t), q(t), \dots)$, $T(t)$ – температура, $\sigma(t)$ – еквівалентне механічне напруження, $\dot{\epsilon}(t)$ – швидкість пластичного деформування, $q(t)$ – інтенсивність зовнішнього теплового впливу, а інші компоненти можуть характеризувати особливості конкретного технологічного процесу.

Відповідно до фізичної постановки задачі швидкість зміни функції стану визначається різницею між швидкістю накопичення зміцнення та швидкістю його релаксації. Тому еволюцію процесу доцільно описати балансним співвідношенням

$$\frac{dy}{dt} = P(y, \mathbf{u}(t), t) - R(y, \mathbf{u}(t), t), \quad (1)$$

де функція $P(y, \mathbf{u}(t), t)$ характеризує інтенсивність процесів накопичення зміцнення, а функція $R(y, \mathbf{u}(t), t)$ – інтенсивність релаксаційних процесів.

Для компактності подальших записів введемо узагальнену функцію швидкості еволюції

$$G(y, \mathbf{u}(t), t) = P(y, \mathbf{u}(t), t) - R(y, \mathbf{u}(t), t). \quad (2)$$

Тоді рівняння (1) можна записати у більш компактному вигляді

$$\frac{dy}{dt} = G(y, \mathbf{u}(t), t). \quad (3)$$

Співвідношення (3) визначає загальну структуру математичної моделі, однак ще не задає конкретного вигляду функції G . Подальша побудова полягає у встановленні її

функціональної залежності на основі фізичних закономірностей процесу термомеханічного зміцнення. Саме цей етап приводить до отримання узагальненого рівняння Ріккати, яке є математичним ядром запропонованої моделі.

Отже, математична постановка задачі полягає у побудові такої функції $G(y, u(t), t)$, яка адекватно описує фізичні закономірності процесу термомеханічного зміцнення, забезпечує коректність математичної моделі та дозволяє дослідити вплив керувальних параметрів на еволюцію стану матеріалу. Наступним кроком є конкретизація цієї функції та виведення узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами.

Побудова узагальненого рівняння Ріккати

Відповідно до співвідношення (2), подальша побудова математичної моделі зводиться до визначення аналітичної структури узагальненої функції швидкості еволюції $G(y, u(t), t)$. Оскільки функція G формується як різниця між швидкостями накопичення зміцнення та релаксації, її математичний опис повинен відображати фізичну природу обох процесів і водночас бути придатним для подальшого аналітичного та чисельного дослідження.

У загальному випадку функції $P(y, u(t), t)$ і $R(y, u(t), t)$, що входять до співвідношення (2), є нелінійними функціями стану матеріалу. Їх точний аналітичний вигляд визначається фізико-механічними властивостями середовища, температурним режимом, історією навантаження та іншими чинниками технологічного процесу. Тому замість введення емпіричного закону використаємо локальну апроксимацію цих функцій у деякому околі робочого стану.

Нехай y_* відповідає вибраному робочому стану матеріалу. Для подальшого аналізу введемо відхилення

$$z(t) = y(t) - y_*. \quad (4)$$

Використовуючи співвідношення (4), розкладемо функції накопичення зміцнення та релаксації в ряд Тейлора за степенями z . Припустимо, що обидві функції двічі неперервно диференційовні за змінною стану. Оскільки метою є побудова найпростішої нелінійної моделі, здатної відобразити основні закономірності взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації, обмежимося членами другого порядку. Такий вибір є компромісом між фізичною адекватністю опису процесу та математичною простотою моделі, а використання апроксимацій вищих порядків у межах поставленої задачі призводить б до істотного ускладнення математичного опису без принципового розширення його аналітичних можливостей.

Тоді функція накопичення зміцнення має вигляд

$$P(y, u(t), t) = P_0(t) + P_1(t)z + P_2(t)z^2 + O(z^3), \quad (5)$$

де

$$P_0(t) = P(y_*, u(t), t), \quad P_1(t) = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=y_*}, \quad P_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \Big|_{y=y_*}.$$

Аналогічно для функції релаксації отримуємо

$$R(y, u(t), t) = R_0(t) + R_1(t)z + R_2(t)z^2 + O(z^3), \quad (6)$$

де

$$R_0(t) = R(y_*, u(t), t), \quad R_1(t) = \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{y=y_*}, \quad R_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \Big|_{y=y_*}.$$

Підставляючи апроксимації (5) і (6) у балансне рівняння (1), одержуємо

$$\frac{dz}{dt} = (P_2 - R_2)z^2 + (P_1 - R_1)z + (P_0 - R_0) + O(z^3). \quad (7)$$

Співвідношення (7) показує, що локальна еволюція функції стану визначається квадратичною залежністю від відхилення z , тоді як член $O(z^3)$ характеризує похибку апроксимації. Оскільки залишковий член є величиною третього порядку малості, його внесок у достатньо малому околі робочого стану значно менший за внесок квадратичних членів. Тому, зберігаючи основні фізичні закономірності процесу, у подальшому ним можна знехтувати.

Після відкидання залишкового члена $O(z^3)$ із співвідношення (7) отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = (P_2 - R_2)z^2 + (P_1 - R_1)z + (P_0 - R_0). \quad (8)$$

Рівняння (8) є локальною квадратичною моделлю еволюції процесу, що є найпростішим нелінійним математичним описом взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації. Воно безпосередньо пов'язує математичний опис із фізичними механізмами накопичення зміцнення та релаксації і створює основу для введення узагальнених коефіцієнтів моделі.

Для компактності подальших записів введемо коефіцієнти

$$a(t) = P_2(t) - R_2(t), \quad (9)$$

$$b(t) = P_1(t) - R_1(t), \quad (10)$$

$$c(t) = P_0(t) - R_0(t), \quad (11)$$

Коефіцієнти, визначені співвідношеннями (9) – (11), не є формально введеними параметрами. Коефіцієнт $a(t)$ характеризує різницю нелінійних складових процесів накопичення зміцнення та релаксації. Коефіцієнт $b(t)$ описує зміну балансу цих процесів при малому відхиленні стану матеріалу від вибраного робочого режиму. Коефіцієнт $c(t)$ визначає безпосередній баланс між швидкостями накопичення і релаксації у стані $y = y_*$.

З урахуванням позначень (9) – (11) рівняння (8) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = a(t)z^2 + b(t)z + c(t). \quad (12)$$

Рівняння (12) є узагальненим рівнянням Ріккаті зі змінними коефіцієнтами відносно локального відхилення $z(t)$. Воно не постулюється на початку побудови, а виникає як результат локальної квадратичної апроксимації двох фізично різних механізмів – накопичення зміцнення та релаксації. У цьому сенсі рівняння (12) є найпростішою нелінійною моделлю, яка зберігає вплив поточного стану матеріалу на швидкість його подальшої еволюції.

Фізичний зміст коефіцієнтів рівняння (12) впливає безпосередньо з їх визначень. Якщо $c(t) > 0$, то відповідно до співвідношення (11) у робочому стані переважає

накопичення зміцнення. За $c(t) < 0$ домінують релаксаційні процеси, а рівність $c(t) = 0$ відповідає миттєвому балансу обох механізмів.

Знак коефіцієнта $b(t)$, заданого формулою (10), визначає характер лінійної реакції системи на відхилення від робочого стану. Від'ємні значення $b(t)$ відповідають поступовому гальмуванню процесу, тоді як додатні значення свідчать про підсилення швидкості еволюції зі зростанням відхилення $z(t)$.

Коефіцієнт $a(t)$, визначений співвідношенням (9), задає нелінійний зворотний зв'язок. За $a(t) < 0$ квадратичний член обмежує зростання функції стану та відображає насичення процесу зміцнення. Якщо $a(t) > 0$, нелінійний внесок має підсилювальний характер і за певних режимів може призводити до швидкого зростання розв'язку. Тому знак і величина коефіцієнта $a(t)$ мають вирішальне значення для оцінювання стійкості та обмеженості процесу.

Для повернення до початкової функції стану використаємо співвідношення (4). Підставляючи (4) до рівняння (12) та розкриваючи дужки, одержуємо

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^2 + \tilde{b}(t)y + \tilde{c}(t), \quad (13)$$

де $\tilde{b}(t) = b(t) - 2a(t)y_*$, $\tilde{c}(t) = a(t)y_*^2 - b(t)y_* + c(t)$.

Із рівняння (13) видно, що перенесення початку відліку не змінює типу математичної моделі: вона залишається рівнянням Ріккаті, а перетворення стосується лише лінійного та вільного коефіцієнтів.

Надалі робочий стан вибиратимемо як початок відліку, тобто покладатимемо $y_* = 0$. Тоді з рівняння (13) випливає остаточно форма задачі Коші

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (14)$$

Отримане узагальнене рівняння Ріккаті є центральним елементом побудованої математичної моделі. Воно описує еволюцію узагальненої функції стану в часі та забезпечує єдиний математичний опис взаємодії процесів накопичення зміцнення і релаксації. Використання саме такого рівняння відкриває можливість застосування методів якісної теорії диференціальних рівнянь, дослідження властивостей розв'язків, аналізу впливу параметрів моделі та проведення чисельних експериментів різних режимів процесу термомеханічного зміцнення.

Коефіцієнти рівняння (14), що визначаються співвідношеннями (9) – (11), відображають різні складові взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації. Така конструкція зберігає фізичний зміст вихідного балансового співвідношення та водночас забезпечує компактний математичний опис, придатний для якісного аналізу, чисельного інтегрування і дослідження впливу параметрів технологічного режиму.

Якісний аналіз моделі

Побудована математична модель визначається задачею Коші (14), у якій коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ та $c(t)$ задаються співвідношеннями (9) – (11). На відміну від класичного рівняння Ріккаті, у запропонованій моделі зазначені коефіцієнти мають безпосередню фізичну інтерпретацію, що дозволяє пов'язати властивості розв'язку з параметрами процесу термомеханічного зміцнення.

За умови неперервності функцій $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$ на досліджуваному часовому інтервалі права частина рівняння (14) є неперервною та локально ліпшицевою за змінною y . Тому для будь-якого початкового значення

$$y(t_0) = y_0, \quad (15)$$

задача Коші для рівняння (14) має єдиний локальний розв'язок.

Функція (15) відповідно до рівняння (14) визначає миттєву швидкість зміни функції стану.

Для дослідження характеру еволюції процесу введемо функцію

$$F(y, t) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad (16)$$

яка відповідно до рівняння (14) визначає миттєву швидкість зміни функції стану.

Із визначення (16) випливає, що знак функції $F(y, t)$ повністю визначає напрям еволюції процесу. Якщо

$$F(y, t) > 0, \quad (17)$$

то відповідно до рівняння (14) функція стану зростає, тобто процеси накопичення зміцнення переважають над процесами релаксації. Якщо ж

$$F(y, t) < 0, \quad (18)$$

то згідно зі співвідношенням (14) функція $y(t)$ зменшується, що відповідає домінуванню релаксаційних механізмів.

Нерівність (17) означає, що швидкість еволюції є додатною, тому відповідно до рівняння (14) процес накопичення зміцнення переважає над процесами релаксації. Нерівність (18) відповідає від'ємній швидкості еволюції, що згідно з рівнянням (14) характеризує переважання релаксаційних процесів.

Вплив окремих коефіцієнтів рівняння (14) на характер еволюції має різну фізичну природу. Коефіцієнт $c(t)$, визначений формулою (11), задає початковий баланс між накопиченням зміцнення та релаксацією. Коефіцієнт $b(t)$, введений співвідношенням (10), характеризує лінійну реакцію системи на зміну її поточного стану. Найважливішу роль відіграє коефіцієнт $a(t)$, визначений співвідношенням (9), оскільки саме він формує нелінійний зворотний зв'язок.

Якщо

$$a(t) < 0, \quad (19)$$

то квадратичний член у рівнянні (14) обмежує подальше зростання функції стану. У міру збільшення рівня зміцнення його внесок стає дедалі істотнішим, що приводить до поступового зменшення швидкості еволюції. Такий режим відповідає фізично природному ефекту тенденції до насичення процесу термомеханічного зміцнення.

Умова (19) визначає режим негативного нелінійного зворотного зв'язку, за якого зі збільшенням функції стану швидкість процесу поступово зменшується.

У випадку

$$a(t) > 0, \quad (20)$$

квадратична складова рівняння (14), навпаки, підсилює швидкість зміни функції стану. За таких умов інтенсивність накопичення структурних змін може істотно зростати,

тому відповідні режими потребують додаткового контролю під час чисельного інтегрування.

Умова (20) відповідає підсилювальному характеру квадратичного члена рівняння (14), що може призводити до прискореного розвитку процесу.

Для оцінювання чутливості моделі до зміни функції стану обчислимо похідну функції (16)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2a(t)y + b(t). \quad (21)$$

Похідна (21) характеризує локальну зміну швидкості еволюції при зміні поточного стану матеріалу. Якщо

$$2a(t)y + b(t) < 0, \quad (22)$$

то зі збільшенням функції стану швидкість процесу зменшується, що відповідає стабілізації еволюції та поступовому наближенню до режиму тенденції до насичення.

Нерівність (22) означає, що похідна (21) є від'ємною, а отже, швидкість еволюції зменшується зі зростанням функції стану.

Якщо ж

$$2a(t)y + b(t) > 0, \quad (23)$$

то згідно з похідною (21) швидкість еволюції зростає разом зі збільшенням функції стану, що свідчить про підсилення нелінійного ефекту.

Нерівність (23) свідчить, що похідна (21) є додатною, тому зі збільшенням функції стану швидкість еволюції також зростає.

Для фізично допустимих режимів доцільно вимагати невід'ємності функції стану. Зокрема, якщо

$$c(t) \geq 0, \quad (24)$$

то відповідно до визначення коефіцієнта (11) швидкість зміни функції стану в околі $y=0$ є невід'ємною, що забезпечує відсутність переходу розв'язку до фізично беззмістовних від'ємних значень.

Таким чином, аналіз рівняння (14) показав, що характер еволюції процесу термомеханічного зміцнення визначається спільною дією коефіцієнтів (9) – (11). Коефіцієнт $c(t)$ задає початковий напрям розвитку процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає його лінійну реакцію, а коефіцієнт $a(t)$ формує нелінійний механізм тенденції до насичення або прискорення. Отримані результати є підґрунтям для вибору параметрів моделі та побудови алгоритму чисельного розв'язування, наведеного в наступному підрозділі.

Алгоритм чисельного розв'язування

Оскільки коефіцієнти рівняння (14) є змінними функціями часу, отримати його аналітичний розв'язок у загальному випадку практично неможливо. Тому для дослідження еволюції процесу термомеханічного зміцнення використано класичний метод Рунге–Кутти четвертого порядку, який забезпечує високу точність інтегрування за помірних обчислювальних витрат.

Чисельне розв'язування виконується для задачі Коші (14) з початковою умовою (15). Для скорочення записів праву частину рівняння (14) подамо у вигляді

$$f(t, y) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \quad (25)$$

Функція (25) визначає миттєву швидкість зміни функції стану та використовується на всіх етапах чисельного інтегрування.

Нехай часовий інтервал дослідження $[t_0, T]$ розбито на N рівних кроків довжиною

$$h = \frac{T - t_0}{N}. \quad (26)$$

Величина кроку інтегрування визначається співвідношенням (26) і вибирається з урахуванням необхідної точності розрахунків та характеру зміни коефіцієнтів рівняння (14).

Позначимо наближене значення функції стану у вузлі t_n через y_n . Відповідно до методу Рунге–Кутти четвертого порядку обчислюються проміжні прирости

$$k_1 = h f(t_n, y_n), \quad (27)$$

$$k_2 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (28)$$

$$k_3 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (29)$$

$$k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3). \quad (30)$$

Коефіцієнт k_1 , визначений формулою (27), характеризує нахил інтегральної кривої на початку кроку інтегрування. Значення k_2 та k_3 , обчислені за співвідношеннями (28) і (29), уточнюють оцінку похідної в середині кроку, а коефіцієнт k_4 , визначений формулою (30), враховує поведінку розв'язку наприкінці інтервалу.

Після обчислення коефіцієнтів (27) – (30) наближене значення функції стану на наступному часовому кроці визначається співвідношенням

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (31)$$

Формула (31) забезпечує четвертий порядок точності за кроком інтегрування та дозволяє отримати стійкий чисельний розв'язок для широкого класу функцій $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$.

Таким чином, алгоритм чисельного розв'язування складається з таких послідовних етапів.

1. Задати часовий інтервал дослідження, початкову умову (15), коефіцієнти моделі (9) – (11) та обчислити крок інтегрування за формулою (26).
2. Для поточного вузла сітки обчислити значення функції (25).
3. Послідовно визначити коефіцієнти $k_1 - k_4$ за формулами (27) – (30).
4. Обчислити нове значення функції стану за формулою (31).
5. Перейти до наступного вузла часової сітки та повторювати обчислення до досягнення кінцевого моменту часу T .

На кожному кроці інтегрування коефіцієнти моделі можуть змінюватися відповідно до заданого температурного та силового режимів. Це дозволяє

безпосередньо враховувати вплив зміни технологічних параметрів на процес термомеханічного зміцнення без модифікації структури алгоритму.

Метод Рунге–Кутти четвертого порядку характеризується локальною похибкою порядку $O(h^5)$ та глобальною похибкою порядку $O(h^4)$. Тому зменшення кроку інтегрування, визначеного співвідношенням (26), забезпечує збіжність чисельного розв'язку до точного за умови достатньої гладкості функції (25).

Обчислювальна складність алгоритму є лінійною відносно кількості вузлів часової сітки, оскільки на кожному кроці виконується фіксована кількість арифметичних операцій і чотири обчислення функції (25). Це робить запропонований алгоритм придатним для багаторазових параметричних розрахунків і проведення серій чисельних експериментів.

Наведений алгоритм використано для дослідження впливу коефіцієнтів моделі (9)–(11) на еволюцію функції стану, результати якого наведено в наступному підрозділі.

Чисельний експеримент

Для перевірки працездатності моделі (14) та дослідження впливу її коефіцієнтів проведено серію чисельних експериментів. Розрахунки виконано за алгоритмом Рунге–Кутти четвертого порядку, наведеним у попередньому підрозділі. Початкове значення функції стану прийнято рівним $y_0 = 0,1$.

Інтегрування виконувалося на часовому інтервалі

$$t \in [0; 10]. \quad (32)$$

Інтервал (32) розбивався на рівномірну сітку з кроком

$$h = 0,01. \quad (33)$$

Значення кроку (33) надалі перевірялося шляхом повторних розрахунків на згущених часових сітках.

Для чисельного дослідження вибрано три режими зі змінними коефіцієнтами. У всіх випадках коефіцієнт $a(t)$ залишався від'ємним, що забезпечувало негативний нелінійний зворотний зв'язок і виключало штучне вибухове зростання розв'язку. Параметри режимів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Функції коефіцієнтів для чисельного експерименту

Режим	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$	Характер режиму
I	$-0,35[1 + 0,12\sin(0,5t)]$	$0,18 + 0,04e^{-0,4t}$	$0,30 - 0,05e^{-0,8t}$	Помірний режим насичення
II	$-0,75[1 + 0,10\sin(0,5t)]$	$0,35 + 0,03e^{-0,4t}$	$0,50 - 0,08e^{-0,8t}$	Інтенсивний початковий процес із сильнішим нелінійним обмеженням
III	$-0,14[1 + 0,08\sin(0,5t)]$	$0,46 + 0,04e^{-0,4t}$	$0,24 - 0,04e^{-0,8t}$	Прискорене накопичення за слабшого ефекту насичення

Залежності $y(t)$, отримані для параметрів із табл. 1, наведено на рис. 1.

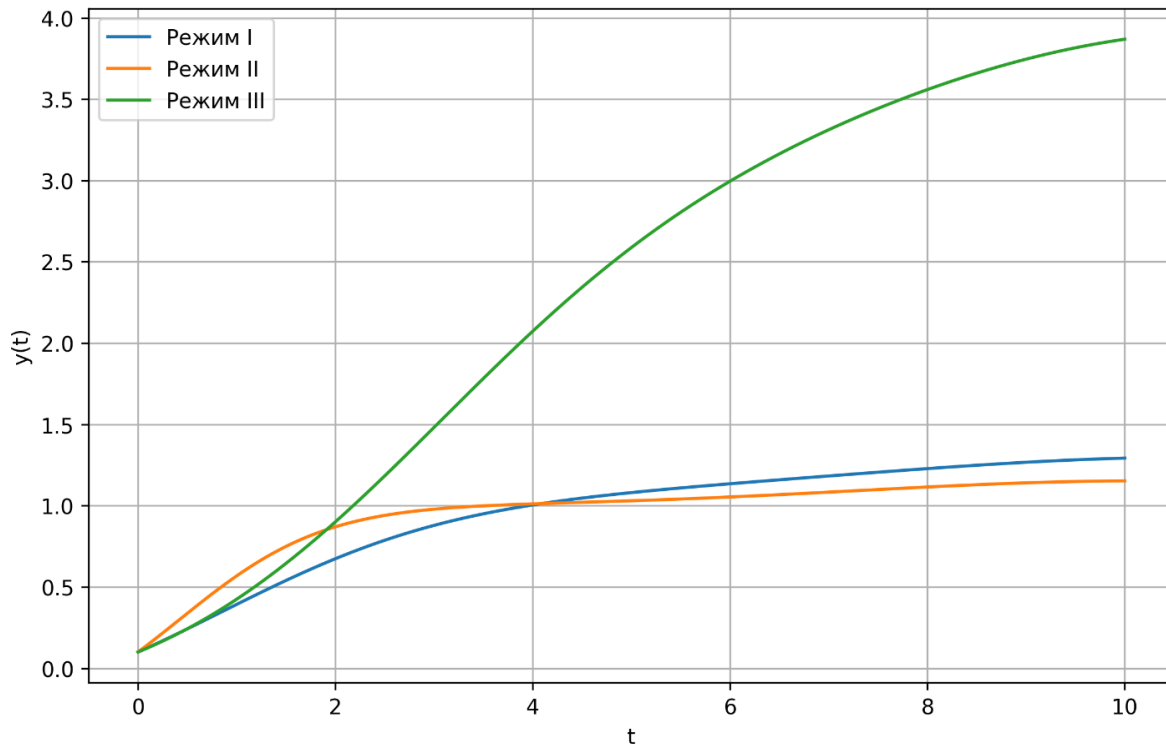


Рис. 1. Еволюція функції стану для трьох режимів термомеханічного зміцнення

У всіх розглянутих режимах функція стану залишається невід'ємною та монотонно зростає. Для режиму I характерне плавне накопичення зміцнення з поступовим зменшенням швидкості процесу. У режимі II початкове зростання є інтенсивнішим, однак більше за модулем від'ємне значення $a(t)$ посилює нелінійне обмеження, унаслідок чого функція стану демонструє більш виражену тенденцію до стабілізації. У режимі III слабший нелінійний зворотний зв'язок поєднується з більшим додатним лінійним внеском, тому на кінці інтервалу (32) отримано найвище значення функції стану.

Кількісні результати чисельного інтегрування наведено в табл. 2. Для порівняння режимів визначали значення $y(10)$, максимальне значення функції стану на інтервалі (32) та момент досягнення рівня, що становить 95 % від $y(10)$.

Таблиця 2

Основні результати чисельного моделювання

Режим	$y(10)$	$\max y(t)$	Час досягнення $0,95y(10)$
I	1,2923	1,2923	8,00
II	1,1524	1,1524	7,37
III	3,8688	3,8688	8,59

Результати табл. 2 підтверджують, що збільшення модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ не обов'язково підвищує кінцевий рівень зміцнення. У режимі II воно насамперед посилює ефект насичення, обмежуючи подальше зростання $y(t)$. Найбільше значення $y(10) = 3,8688$ отримано для режиму III, у якому нелінійне обмеження є найслабшим.

Для окремого аналізу ролі квадратичного коефіцієнта виконано додаткові розрахунки за однакових функцій $b(t)$ і $c(t)$, але за різної амплітуди $a(t)$. В усіх трьох випадках прийнято

$$b(t) = 0,30 + 0,03e^{-0,4t}, \quad c(t) = 0,32 - 0,05e^{-0,8t},$$

а базове значення коефіцієнта $a(t)$ змінювалося від $-0,75$ до $-0,14$. Отримані залежності наведено на рис. 2.

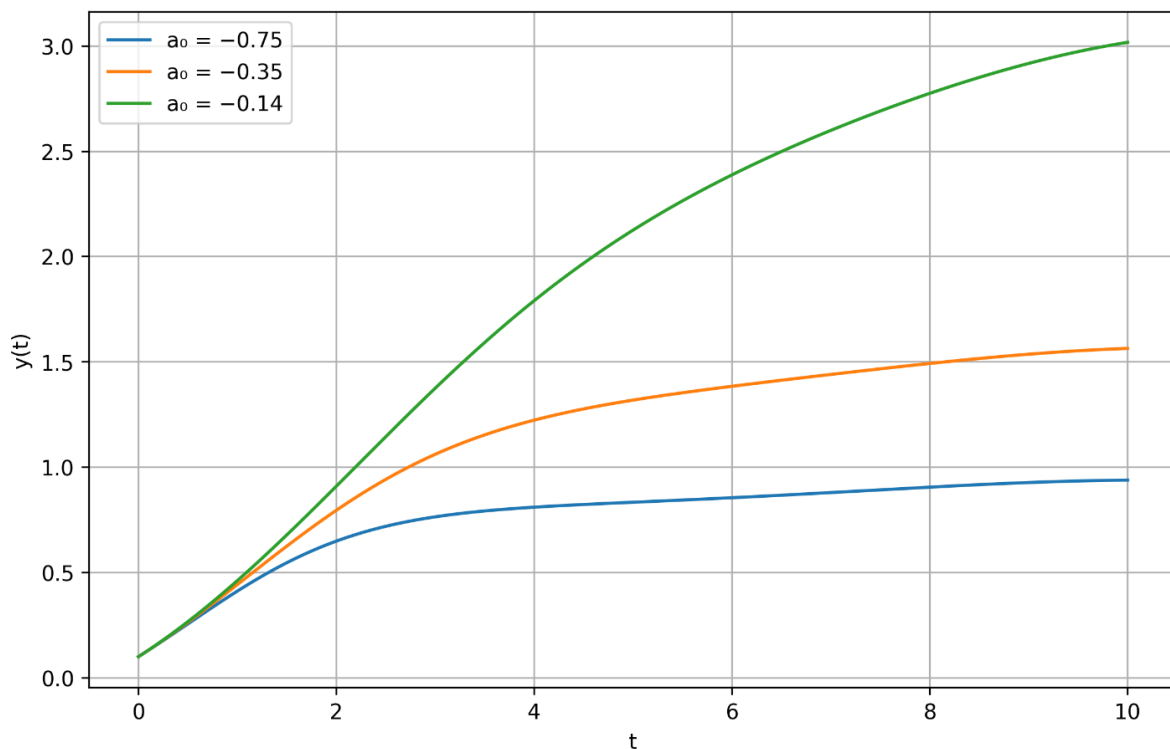


Рис. 2. Вплив коефіцієнта $a(t)$ на еволюцію функції стану

З наведених на рис. 2 залежностей видно, що зі збільшенням модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ нелінійне гальмування посилюється, а граничний рівень функції стану зменшується. За меншого модуля $a(t)$ процес довше зберігає високу швидкість, унаслідок чого досягається значно вищий рівень зміцнення. Цей результат узгоджується з якісним аналізом рівняння (14), згідно з яким від'ємний квадратичний член формує механізм насичення.

Проведений чисельний експеримент підтвердив працездатність моделі (14) та розробленого алгоритму. Запропонована конструкція відтворює режими поступового насичення, інтенсивного початкового зміцнення і тривалого прискореного накопичення структурних змін без зміни загальної форми рівняння. Отримані результати також показують, що коефіцієнт $a(t)$ визначає інтенсивність нелінійного обмеження, тоді як функції $b(t)$ і $c(t)$ задають лінійне підсилення та зовнішню складову процесу.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати підтверджують, що запропонований підхід до математичного моделювання процесу термомеханічного зміцнення дозволяє перейти від загального фізичного опису взаємодії процесів накопичення зміцнення та релаксації до компактної математичної моделі, придатної для теоретичного аналізу й чисельного дослідження. На відміну від моделей, у яких рівняння Ріккати використовується лише як зручний математичний апарат, у даній роботі воно отримане як наслідок локальної квадратичної

апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації. Це забезпечує фізичну інтерпретацію коефіцієнтів моделі та встановлює зв'язок між їх математичним змістом і параметрами технологічного процесу.

Проведений якісний аналіз показав, що характер еволюції функції стану визначається спільною дією коефіцієнтів $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$. Зокрема, коефіцієнт $a(t)$ формує нелінійний механізм саморегулювання процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає інтенсивність лінійної реакції системи на зміну її поточного стану, а коефіцієнт $c(t)$ характеризує початковий баланс між процесами накопичення зміцнення та релаксації.

Результати чисельного експерименту підтвердили основні висновки якісного аналізу. Зокрема, збільшення модуля від'ємного коефіцієнта $a(t)$ приводить до більш вираженого нелінійного обмеження швидкості зміни функції стану, тоді як його зменшення сприяє тривалішому інтенсивному накопиченню зміцнення. При цьому зміна коефіцієнтів $b(t)$ і $c(t)$ дозволяє моделювати різні початкові режими розвитку процесу без зміни загальної структури математичної моделі.

Порівняно з відомими підходами, що ґрунтуються на використанні лінійних або емпіричних залежностей, запропонована модель має низку переваг. По-перше, вона враховує нелінійну взаємодію процесів накопичення зміцнення та релаксації в межах єдиного математичного опису. По-друге, змінні коефіцієнти рівняння дозволяють враховувати зміну температурного режиму, механічного навантаження та інших факторів без перебудови структури моделі. По-третє, компактний вигляд рівняння (14) забезпечує можливість застосування стандартних чисельних методів інтегрування, що суттєво спрощує проведення багаторазових параметричних розрахунків.

До основних переваг запропонованої математичної моделі належать компактність математичного опису, фізична інтерпретованість її коефіцієнтів, можливість врахування зміни технологічних параметрів без зміни структури рівняння, а також придатність до ефективного чисельного моделювання та проведення багаторазових параметричних досліджень.

Слід зазначити, що запропонована модель не замінює класичні моделі термомеханіки, побудовані на системах рівнянь теплопровідності, рівноваги та визначальних співвідношень. Її призначення полягає у формуванні узагальненого математичного опису еволюції процесу зміцнення, який може використовуватися для аналізу закономірностей процесу, параметричних досліджень і попередньої оцінки впливу технологічних режимів без побудови повномасштабних чисельних моделей.

Запропонований підхід не претендує на універсальний опис усіх процесів термомеханічного зміцнення. Побудована модель є узагальненою і базується на локальній квадратичній апроксимації вихідних функцій, тому її застосування є найбільш обґрунтованим у тих режимах, для яких таке наближення адекватно відображає реальну фізичну поведінку матеріалу. Для задач із різко вираженими нелінійностями або структурними перетвореннями може виникнути необхідність використання апроксимацій вищих порядків або розширення моделі шляхом введення додаткових змінних стану.

Практична цінність запропонованої моделі полягає у можливості прогнозування характеру еволюції процесу термомеханічного зміцнення за різних режимів навантаження та температурного впливу. Це створює передумови для використання моделі під час вибору раціональних параметрів технологічних процесів для аналізу впливу температурних режимів, механічних навантажень і технологічних параметрів на еволюцію процесу зміцнення, вибору раціональних режимів обробки матеріалів та проведення комп'ютерних параметричних експериментів без необхідності виконання великої кількості натурних випробувань.

Подальший розвиток дослідження доцільно пов'язати з верифікацією запропонованої моделі за результатами експериментальних досліджень або детального чисельного моделювання конкретних технологічних процесів термомеханічного зміцнення.

Побудована модель поєднує фізичну обґрунтованість, відносно математичну простоту та можливість ефективної чисельної реалізації, що робить її перспективною для подальших досліджень процесів термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл.

6 ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано математичну модель процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл, побудовану на основі узагальненого рівняння Ріккати зі змінними коефіцієнтами. На відміну від традиційного використання рівняння Ріккати як апіорно заданої математичної моделі, у запропонованому підході воно отримане як наслідок локальної квадратичної апроксимації узагальнених функцій накопичення зміцнення та релаксації, що забезпечило фізичну інтерпретацію всіх коефіцієнтів моделі.

Проведений якісний аналіз показав, що характер еволюції функції стану визначається спільною дією коефіцієнтів моделі. Встановлено, що коефіцієнт $a(t)$ відповідає за нелінійний механізм саморегулювання процесу, коефіцієнт $b(t)$ визначає інтенсивність лінійної реакції системи, а коефіцієнт $c(t)$ характеризує початковий баланс між процесами накопичення зміцнення та релаксації. Отримані результати дозволяють оцінювати умови стабілізації процесу та прогнозувати характер його подальшого розвитку.

Для чисельного дослідження моделі розроблено алгоритм розв'язування задачі Коші на основі класичного методу Рунге–Кутти четвертого порядку. Запропонований алгоритм забезпечує високу точність інтегрування, є обчислювально ефективним і не потребує модифікації при зміні функціонального вигляду коефіцієнтів моделі.

Проведений чисельний експеримент підтвердив працездатність побудованої моделі та узгодженість результатів якісного аналізу з даними чисельного моделювання. Показано, що зміна коефіцієнтів рівняння дозволяє відтворювати різні режими еволюції процесу термомеханічного зміцнення, а найбільший вплив на характер розв'язку має нелінійний коефіцієнт $a(t)$, який визначає інтенсивність ефекту насичення.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі для комп'ютерного моделювання процесів термомеханічного зміцнення, дослідження впливу технологічних параметрів на еволюцію структурного стану матеріалу та проведення параметричних чисельних експериментів без необхідності виконання значної кількості натурних випробувань.

Подальший розвиток досліджень доцільно спрямувати на врахування просторової неоднорідності матеріалу, температурної залежності його фізико-механічних характеристик та побудову багатопараметричних моделей термомеханічного зміцнення для складних технологічних процесів.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Green A. E., Naghdi P. M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1991. Vol. 432, No. 1885. P. 171–194. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012>.
2. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. Vol. 15, No. 5. P. 299–309. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5).
3. Green A. E., Lindsay K. A thermoelasticity. *Journal of Elasticity*. 1972. Vol. 2, No. 1. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00045689>.
4. Shakeriaski F., Ghodrat M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: A review. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2021. Vol. 8, No. 1. P. 15–35. DOI: <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082>.
5. Abo-Dahab S. M., Abouelregal A. E. Thermoelastic medium in the context of four theories subjected to gravity field and laser pulse. *Waves in Random and Complex Media*. 2024. Vol. 34, No. 1. P. 95–118. DOI: <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1898699>.
6. Abouelregal A. E. On a multi-phase-lag model of coupled thermoelasticity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2020. Vol. 116. Article 104682. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682>.
7. Hart E. L., Hudramovich V. S. Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022. No. 108. P. 77–86. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>.
8. Kushnir R., Yasinsky A., Tokovyy Yu., Hart E. Inverse thermoelastic analysis of a bimaterial cylinder with interfacial friction. *Materials*. 2021. Vol. 14. Article 2657. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14102657>.
9. Siasiev A., Dreus A., Horbonos S., Balanenko I., Dziuba S. The stressed-strained state of a rod at crystallization considering the mutual influence of temperature and mechanical fields. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 3, No. 5 (105). P. 38–49. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.203330>.
10. Siasiev A. Mathematical Modelling of Manufacturing Processes of Parts and Structural Elements by Build-up Methods. *European Science*. 2022. Vol. 1, No. 12–01. P. 66–103. DOI: <https://doi.org/10.30890/2709-2313.2022-12-01-002>.
11. Siasiev A. V., Bilichenko R. O. Construction of a non-linear analytical model for the rotation parts building up process using regression analysis. *Researches in Mathematics*. 2024. Vol. 32, No. 1. P. 16–32. DOI: <https://doi.org/10.15421/242413>.
12. Сясев, А. В., Косташук, М. В. Моделювання процесу кристалізації стрижня з урахуванням взаємного впливу температурних і механічних полів. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Моделювання*. 2015. Т. 23, № 8. С. 9–28.
13. Liu Y., Long H., Zhang S., Zhou Q., Song J., Wei Y. Coupling effect of strain gradient strengthening and thermal softening on the microscale plastic behavior of metallic materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2023. Vol. 102. Article 105117. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105117>.
14. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. No. 110. P. 63–80. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>.
15. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2021. Vol. 29, No. 1. P. 42–53. DOI: <https://doi.org/10.15421/142103>.
16. Hu Y. F., Ho H. C., Chung K. F., Xiao M., Liu X., Nethercot D. A. Integrated and coordinated numerical simulations on fabrication processes of high-strength S690 cold-formed circular hollow sections. *Engineering Structures*. 2023. Vol. 279. Article 115620. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115620>.
17. Wang K., Zhou J., Ma Y., Ding A., Chen X. Constitutive and numerical modeling for the coupled thermal-hydro-mechanical processes in dual-porosity geothermal reservoir. *Applied Thermal*

Engineering, 2023. Vol. 223. Article 120027. DOI:
<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.120027>.

References

1. Green, A. E., & Naghdi, P. M. (1991). A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 432(1885), 171–194. [in English] [doi:10.1098/rspa.1991.0012](https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012)
2. Lord, H. W., & Shulman, Y. (1967). A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(5), 299–309. [in English] [doi:10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
3. Green, A. E., & Lindsay, K. (1972). Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 2(1), 1–7. [in English] [doi:10.1007/BF00045689](https://doi.org/10.1007/BF00045689)
4. Shakeriaski, F., Ghodrat, M., Escobedo-Diaz, J., & Behnia, M. (2021). Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: A review. *Journal of Computational Design and Engineering*, 8(1), 15–35. [in English] [doi:10.1093/jcde/qwaa082](https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082)
5. Abo-Dahab, S. M., & Abouelregal, A. E. (2024). Thermoelastic medium in the context of four theories subjected to gravity field and laser pulse. *Waves in Random and Complex Media*, 34(1), 95–118. [in English] [doi:10.1080/17455030.2021.1898699](https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1898699)
6. Abouelregal, A. E. (2020). On a multi-phase-lag model of coupled thermoelasticity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116, Article 104682. [in English] [doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682](https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104682)
7. Hart, E. L., & Hudramovich, V. S. (2022). Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 108, 77–86. [in English] [doi:10.32347/2410-2547.2022.108.77-86](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86)
8. Kushnir, R., Yasinsky, A., Tokovyy, Y., & Hart, E. (2021). Inverse thermoelastic analysis of a bimaterial cylinder with interfacial friction. *Materials*, 14, Article 2657. [in English] [doi:10.3390/ma14102657](https://doi.org/10.3390/ma14102657)
9. Siasiev, A., Dreus, A., Horbonos, S., Balanenko, I., & Dziuba, S. (2020). The stressed-strained state of a rod at crystallization considering the mutual influence of temperature and mechanical fields. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(5[105]), 38–49. [in English] [doi:10.15587/1729-4061.2020.203330](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.203330)
10. Siasiev, A. (2022). Mathematical modelling of manufacturing processes of parts and structural elements by build-up methods. *European Science*, 1(12–01), 66–103. [in English] [doi:10.30890/2709-2313.2022-12-01-002](https://doi.org/10.30890/2709-2313.2022-12-01-002)
11. Siasiev, A. V., & Bilichenko, R. O. (2024). Construction of a non-linear analytical model for the rotation parts building up process using regression analysis. *Researches in Mathematics*, 32(1), 16–32. [in English] [doi:10.15421/242413](https://doi.org/10.15421/242413)
12. Siasiev, A. V., & Kostashchuk, M. V. (2015). Modeliuvannia protsesu krystalizatsii stryzhnia z urakhuvanniam vzaiemnoho vplyvu temperaturnykh i mekhanichnykh poliv [Modeling of the rod crystallization process taking into account the mutual influence of thermal and mechanical fields]. *Visnyk Dnipropetrovskoho Universytetu. Seriya: Modeliuvannia*, 23(8), 9–28. [in Ukrainian]
13. Liu, Y., Long, H., Zhang, S., Zhou, Q., Song, J., & Wei, Y. (2023). Coupling effect of strain gradient strengthening and thermal softening on the microscale plastic behavior of metallic materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 102, Article 105117. [in English] [doi:10.1016/j.euromechsol.2023.105117](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105117)
14. Hart, E. L., & Terokhin, B. I. (2023). Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 110, 63–80. [in English] [doi:10.32347/2410-2547.2023.110.63-80](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80)
15. Hart, E. L., & Terokhin, B. I. (2021). Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 29(1), 42–53. [in English] [doi:10.15421/142103](https://doi.org/10.15421/142103)

16. Hu, Y. F., Ho, H. C., Chung, K. F., Xiao, M., Liu, X., & Nethercot, D. A. (2023). Integrated and coordinated numerical simulations on fabrication processes of high-strength S690 cold-formed circular hollow sections. *Engineering Structures*, 279, Article 115620. [in English]
[doi:10.1016/j.engstruct.2023.115620](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115620)
17. Wang, K., Zhou, J., Ma, Y., Ding, A., & Chen, X. (2023). Constitutive and numerical modeling for the coupled thermal-hydro-mechanical processes in dual-porosity geothermal reservoir. *Applied Thermal Engineering*, 223, Article 120027. [in English]
[doi:10.1016/j.applthermaleng.2023.120027](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.120027)

Сясєв Андрій Валерійович

к.ф.-м.н., доцент

syasevandri@gmail.com,

[ORCID: 0000-0002-0654-7360](https://orcid.org/0000-0002-0654-7360)

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49045

Стаття надійшла до редакції 16.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Сясєв А.В. Математичне моделювання процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккаті. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. № 2. С. 7–26.

For references:

A. Siasiev (2026). Mathematical modeling of thermomechanical hardening in deformable solids based on a generalized Riccati equation. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 7–26.

[Математичне моделювання процесу термомеханічного зміцнення деформівних твердих тіл на основі узагальненого рівняння Ріккаті](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-7-26) © 2026 by [Сясєв А.В.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 004.8:519.22

АНАЛІЗ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ СТРУКТУРИ БАГАТОВИМІРНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА НЕПОВНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Кашкевич С.О.¹, Дехтяренко А.Т.¹, Брановицька І.В.¹, Голего Н.М.¹

¹Національний університет «Київський авіаційний інститут»

Анотація: У роботі проаналізовано просторово-часову структуру багатовимірних інформаційних процесів за умов неповних спостережень. Актуальність дослідження зумовлена тим, що в реальних інформаційних системах значення окремих параметрів можуть бути відсутніми, надходити нерегулярно або формуватися з різною часовою дискретністю, що ускладнює встановлення взаємозв'язків між компонентами процесу та знижує інформативність традиційних методів аналізу.

Метою роботи є аналіз просторово-часових залежностей багатовимірного процесу з урахуванням неповноти вихідних даних. Для формалізації процесу використано матричне представлення станів, бінарну матрицю доступності спостережень та векторне подання компонентів. Неповнота даних визначалася через частку відсутніх елементів, а оцінювання взаємозв'язків виконувалося лише за спільно доступними спостереженнями.

Для аналізу часових залежностей сформовано лагові коваріаційні матриці, виконано їх нормування та побудовано узагальнену блочну матрицю просторово-часової структури. Домінантні закономірності визначалися за спектральним розкладанням цієї матриці та аналізом власних значень і власних векторів.

Для перевірки працездатності запропонованого математичного апарату проведено імітаційне моделювання у середовищі Python із використанням бібліотек NumPy та Matplotlib. У межах експерименту сформовано просторово розподілені часові реалізації багатовимірного процесу, введено випадкові та локально згруповані пропуски, а також додано випадкову похибку малої інтенсивності. Отримані результати показали, що за неповних спостережень у доступних фрагментах зберігається узгодженість між сусідніми просторовими реалізаціями, що дозволяє оцінювати лагові залежності та виділяти характерні структурні компоненти процесу.

Запропонований підхід може бути використаний для аналізу багатовимірних даних у системах моніторингу, діагностики та підтримки прийняття рішень, де спостереження надходять нерівномірно або містять пропуски.

Ключові слова: багатовимірний інформаційний процес, просторово-часова структура, неповні спостереження, часові залежності, коваріаційна матриця, спектральний аналіз, моделювання.

ANALYSIS OF THE SPATIO-TEMPORAL STRUCTURE OF MULTIDIMENSIONAL INFORMATION PROCESSES UNDER INCOMPLETE OBSERVATIONS

S. Kashkevych¹, A. Dekhtiarenko¹, I. Branovytska¹, N. Holeho¹

¹National University "Kyiv Aviation Institute"

Abstract: The paper investigates the spatiotemporal structure of multidimensional information processes under incomplete observations. The relevance of the study is determined by the fact that in real information systems some parameter values may be missing, arrive irregularly, or be formed with different temporal discretization, which complicates the identification of relationships between process components and reduces the informativeness of conventional analysis methods.

The aim of the study is to analyse spatiotemporal dependencies of a multidimensional process while explicitly taking into account the incompleteness of the source data. A matrix representation of process states, a binary observation-availability matrix, and a vector representation of the components were used to formalize the process.

Data incompleteness was quantified through the proportion of missing elements, while relationships were estimated only from jointly available observations. Lagged covariance matrices were formed to analyse temporal dependencies, followed by their normalization and construction of a generalized block matrix describing the spatiotemporal structure. Dominant regularities were identified by spectral decomposition of this matrix and by analysing its eigenvalues and eigenvectors.

To verify the applicability of the proposed mathematical apparatus, simulation modelling was carried out in Python using the NumPy and Matplotlib libraries. The experiment generated spatially distributed time realizations of a multidimensional process, introduced both random and locally grouped missing observations, and added low-intensity random noise. The obtained results showed that, despite incomplete observations, consistency between neighbouring spatial realizations was preserved in the available data fragments. This made it possible to estimate lagged dependencies and identify characteristic structural components of the process. The proposed approach can be applied to multidimensional data analysis in monitoring, diagnostic, and decision-support systems where observations are irregular, partially unavailable, or contain missing values.

The developed representation provides a basis for further assessment of structural changes, anomaly detection, and investigation of the influence of different missing-data patterns and noise levels on the stability of spatiotemporal relationships.

Keywords: multidimensional information process, spatiotemporal structure, incomplete observations, temporal dependencies, covariance matrix, spectral analysis, simulation modelling.

1 ВСТУП

Сучасні інформаційні та організаційно-технічні системи характеризуються значною кількістю взаємопов'язаних параметрів, які змінюються у часі та формуються в різних просторових положеннях. Аналіз таких процесів потребує врахування не лише значень окремих показників, але й характеру їх взаємодії, часової динаміки та структурних залежностей. Особливої актуальності ця задача набуває в умовах неповноти вихідної інформації, коли частина спостережень втрачається, надходить нерегулярно або стає недоступною в окремі моменти часу.

Одним із традиційних напрямів аналізу стану складних об'єктів є використання даних поточного моніторингу.

У роботі [1] було показано значення інформації про фактичний стан системи для прийняття рішень, де результати моніторингу використовуються як основа для оцінювання поточного стану та подальших дій. У роботі [2] розглянуто методи вібраційного моніторингу та обробки сигналів для оцінювання стану структур, зокрема методи отримання, візуалізації й аналізу вимірюваних даних. Водночас зазначені підходи переважно орієнтовані на аналіз окремих сигналів або сукупності вимірювань і не повною мірою враховують одночасну просторову, часову та міжкомпонентну структуру даних за наявності пропусків.

Тому актуальним є дослідження просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів з урахуванням неповноти спостережень. Такий підхід має забезпечувати формалізацію доступності окремих компонентів, оцінювання взаємних і лагових залежностей тільки за фактично наявними даними та виділення домінантних структурних закономірностей процесу.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У роботі [3] розглянуто математичне забезпечення систем підтримки прийняття рішень, зокрема формалізацію задач обробки складної інформації та оцінювання станів систем. Подальший розвиток методів структурного аналізу даних представлено у [4], де для виявлення аномалій використано графове вкладення сигналів, що дозволяє враховувати взаємозв'язки між окремими компонентами.

У [5] запропоновано комбінований біоінспірований алгоритм пошуку рішень для складних багатопараметричних задач. Питання впливу шумів і спотворень на інформаційні процеси досліджувалися у [6], а в [7] розглянуто кореляцію подій та управління інцидентами на основі встановлення структурних взаємозв'язків між інформаційними подіями.

Методи інтелектуального аналізу багатовимірних даних та виявлення нетипових станів розглянуто у [8–12]. У [8] досліджено застосування моделей машинного навчання для виявлення аномальних операцій, у [9] запропоновано методологічний підхід до оцінювання стану складних організаційно-технічних систем, а в [10] систематизовано сучасні методи виявлення аномалій.

Незважаючи на розвиток зазначених підходів, недостатньо дослідженим залишається питання аналізу просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень. Зокрема, потребує подальшої формалізації одночасне врахування міжкомпонентних залежностей, часових зсувів та нерівномірної доступності окремих елементів даних.

Відомі підходи до аналізу багатовимірних часових рядів за наявності пропусків переважно передбачають попереднє відновлення відсутніх значень або оцінювання статистичних характеристик за доступною частиною вибірки. При цьому недостатньо враховується, що для різних пар компонентів і різних часових лагів кількість фактично

доступних спільних спостережень може істотно відрізнятися. Це зумовлює необхідність формування просторово-часового представлення, у якому структура залежностей визначається без попередньої імпутації даних та окремо для кожної пари компонентів з урахуванням її фактичної доступності.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю дослідження є аналіз просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень шляхом формалізації взаємозв'язків між компонентами, оцінювання часових залежностей та визначення особливостей збереження структурних закономірностей за наявності пропущених даних.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в удосконаленні підходу до аналізу просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень. На відміну від підходів, у яких пропущені значення попередньо відновлюються або статистичні залежності оцінюються для єдиної доступної підвибірки, запропонований підхід передбачає формування для кожного часового лагу окремої матриці доступності пар спостережень та оцінювання кожного елемента лагової залежності лише за відповідною множиною фактично наявних пар. Подальше об'єднання таких залежностей у єдину блочну матрицю забезпечує спільне представлення міжкомпонентних і часових зв'язків без внесення штучно відновлених значень.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для дослідження просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів було розглянуто сукупність взаємопов'язаних параметрів, значення яких змінювалися у часі та характеризували стан системи в окремих просторових положеннях. Вхідні дані подавалися у вигляді багатовимірної послідовності спостережень, для якої враховувалися статистичні залежності між компонентами та їх зміна у часі. Особливістю досліджуваних даних була наявність неповних спостережень, за яких частина компонентів у певні моменти часу була відсутня. Для їх формалізації було введено матрицю доступності даних, а аналіз просторово-часових залежностей проводився лише за фактично наявними спостереженнями з подальшим оцінюванням структури багатовимірної процесу.

Подання багатовимірної процесу. Стан інформаційного процесу в момент часу t було представлено матрицею:

$$X_t = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1p}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}(t) & \cdots & x_{Np}(t) \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

де N – кількість просторових положень; p – кількість параметрів; T – кількість часових відліків (1).

Формалізація неповних спостережень. Для визначення доступності окремих значень було сформовано бінарну матрицю:

$$M_t = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & \cdots & m_{1p}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1}(t) & \cdots & m_{Np}(t) \end{bmatrix}, \quad m_{ij}(t) \in \{0,1\}. \quad (2)$$

Значення m_{ij} відповідало наявному спостереженню, а $m_{ij} = 0$ – відсутньому (2).

Модель формування спостережуваних даних. З урахуванням неповноти та випадкових похибок спостережувані дані визначалися як:

$$Y_t = M_t \odot X_t + E_t, \quad (3)$$

де Y_t – матриця доступних спостережень; E_t – матриця випадкових похибок; $\odot$ – поелементний добуток (3).

Ступінь неповноти даних визначався відношенням кількості відсутніх елементів до загальної кількості потенційних спостережень:

$$\rho = 1 - \frac{1}{NTp} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p m_{ij}(t). \quad (4)$$

При $\rho = 0$ спостереження були повними, а збільшення ρ характеризувало зростання частки відсутніх даних (4).

Перехід до векторного представлення. Для спільного аналізу всіх компонентів матрицю стану було перетворено у багатовимірний вектор:

$$z_t = \text{vec}(X_t), \quad z_t \in \mathbb{R}^{Np}. \quad (5)$$

Такий формальний опис дозволив оцінювати взаємні залежності одночасно між просторовими положеннями та різними компонентами процесу (5).

Визначення доступності пар спостережень. Для кожного часового зміщення τ було визначено кількість спільно доступних спостережень:

$$N_\tau = \sum_{t=\tau+1}^T m_t m_{t-\tau}^T, \quad m_t = \text{vec}(M_t). \quad (6)$$

Матриця N_τ визначала, яка кількість пар значень фактично могла бути використана для оцінювання залежності між відповідними компонентами (6).

Принциповою особливістю такого представлення є те, що множина спостережень, яка використовується для оцінювання залежності, формується окремо для кожної пари компонентів та кожного значення τ . Тому оцінювання просторово-часової структури не потребує формування єдиної повної вибірки або попереднього заміщення відсутніх значень.

Просторово-часові залежності оцінювалися за спільно доступними спостереженнями:

$$\hat{C}_\tau = \left[\sum_{t=\tau+1}^T r_t r_{t-\tau}^T \right] \oslash N_\tau, \quad r_t = m_t \odot (y_t - \hat{\mu}). \quad (7)$$

Тут $y_t = \text{vec}(Y_t)$, $\hat{\mu}$ – оцінка середнього значення, а $\oslash$ – поелементне ділення. Таким чином, відсутні значення безпосередньо не включалися до оцінювання коваріацій (7).

Таким чином, елементи матриці просторово-часових залежностей формуються за різними множинами доступних пар спостережень, визначеними матрицею N_τ .

Це відрізняє запропоноване представлення від стандартного оцінювання коваріаційної структури за попередньо сформованою повною вибіркою та дозволяє безпосередньо враховувати нерівномірність пропусків між компонентами процесу.

Нормування просторово-часових залежностей. Для усунення впливу різних масштабів компонентів було сформовано нормовану матрицю залежностей:

$$R_\tau = D^{-1/2} \hat{C}_\tau D^{-1/2}, \quad D = \text{diag}(\hat{C}_0). \quad (8)$$

Матриця R_τ характеризувала силу взаємозв'язку між компонентами багатовимірного процесу при часовому зміщенні τ (8).

Формування сукупної просторово-часової структури. Отримані матриці було об'єднано у блочне представлення:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1^T & \cdots & R_L^T \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{L-1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_L & R_{L-1} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де L – максимальний часовий лаг. Матриця R узагальнювала одночасно миттєві та часово зміщені зв'язки між компонентами процесу (9).

Виділення домінантної структури. Для визначення основних просторово-часових закономірностей було виконано спектральне розкладання:

$$R = Q\Lambda Q^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K). \quad (10)$$

Власні вектори матриці Q визначали характерні просторово-часові структури процесу, а власні значення λ_K – їх внесок у загальну варіативність даних (10).

Для кількісного оцінювання ступеня збереження просторово-часової структури за неповних спостережень використано коефіцієнт структурної відповідності, що характеризує відхилення узагальненої матриці, отриманої при заданому рівні неповноти, від матриці, сформованої за повною вибіркою:

$$S(\rho) = \left(1 + \frac{\|R^{(\rho)} - R^{(0)}\|_F}{\|R^{(0)}\|_F} \right)^{-1}, \quad (11)$$

де $R^{(\rho)}$ – узагальнена матриця просторово-часових залежностей за ступеня неповноти ρ ; $R^{(0)}$ – відповідна матриця для повної вибірки; F – норма Фробеніуса. Значення $S(\rho)$, близькі до одиниці, відповідають високому ступеню збереження структури, а його зменшення характеризує зростання відхилення від еталонного випадку.

Таким чином, сформований математичний апарат забезпечив урахування багатовимірності, часових залежностей і неповноти вихідних спостережень.

Отримане спектральне представлення дало змогу виділити домінантні компоненти просторово-часової структури та кількісно оцінити ступінь її збереження за різного рівня неповноти даних.

Для перевірки працездатності запропонованого математичного апарату було проведено імітаційне моделювання просторово-часової структури багатовимірного інформаційного процесу за неповних спостережень.

Моделювання виконувалося в середовищі Python із використанням бібліотек NumPy та Matplotlib.

В межах експерименту було сформовано $N=11$ просторово розподілених реалізацій $x_i(t)$ на часовому інтервалі $t \in [0; 20]$ із кількістю відліків $T = 220$.

Кожна реалізація містила спільну часову складову та просторово залежний фазовий зсув, що забезпечувало формування узгодженої просторово-часової структури.

Для дослідження впливу неповноти спостережень розглядалися значення $\rho = 0; 0,10; 0,22; 0,30; 0,40$, де $\rho = 0$ відповідало повній вибірці.

Для кожного ненульового значення ρ формувалися випадкові та локально згруповані пропуски, загальна кількість яких відповідала заданому ступеню неповноти. Для зменшення впливу конкретного розташування пропусків для кожного значення ρ виконувалося 30 незалежних реалізацій маски доступності. До модельованих значень додавалася випадкова похибка з середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 0,025$.

На рис. 1 як характерний приклад наведено одну з реалізацій процесу для $\rho = 0,22$.

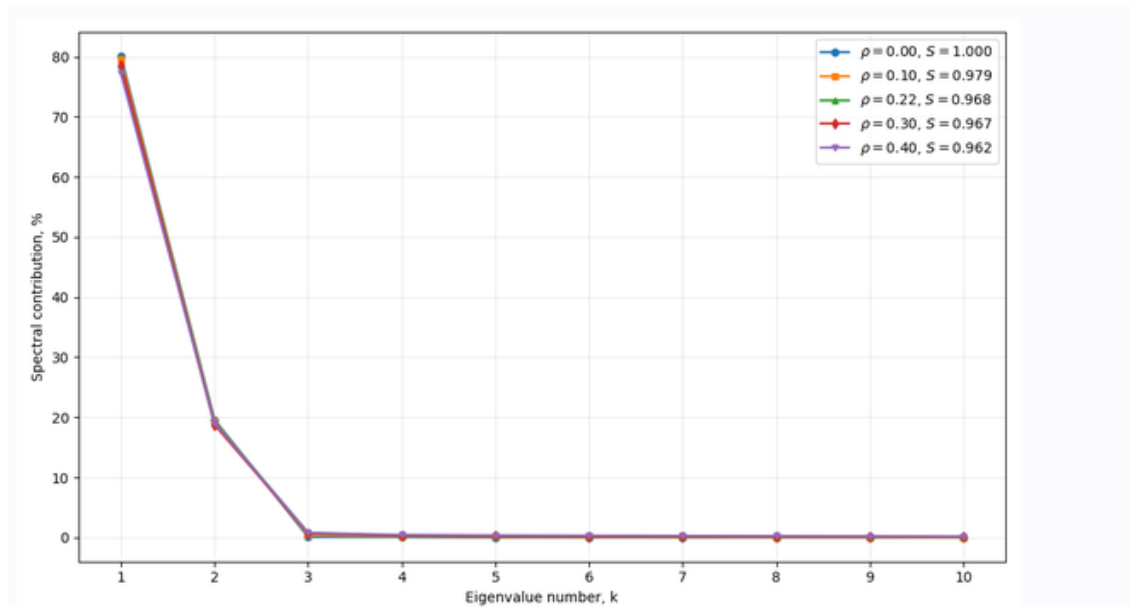


Рис. 1. Нормований спектр власних значень узагальненої матриці просторово-часової структури за різного ступеня неповноти спостережень

Для фіксації умов імітаційного експерименту було сформовано набір основних параметрів моделювання, що визначали розмірність просторово-часового процесу, тривалість спостереження та рівень неповноти вихідних даних. Значення параметрів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри моделювання просторово-часового процесу

Параметр	Позначення	Значення
Кількість просторових положень	N	11
Кількість часових відліків	T	220
Часовий інтервал	t	[0;20]
Частка випадкових пропусків	ρ	0; 0,10; 0,22; 0,30; 0,40
Амплітуда випадкової похибки	σ	0,025
Кількість локальних областей пропусків	n_g	2
Максимальний часовий лаг	L	3
Кількість реалізацій для кожного ρ	n_r	30

Наведені параметри забезпечували формування достатньо щільної просторово-часової структури та одночасно створювали суттєву неповноту спостережень. Поєднання випадкових і локально згрупованих пропусків дозволило відтворити ситуацію, за якої окремі компоненти процесу були доступні нерівномірно у часі, що відповідало умовам, закладеним у математичній моделі.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати показали, що запропонований підхід дозволяє виявляти та кількісно характеризувати просторово-часові залежності багатовимірного інформаційного процесу навіть за наявності неповних спостережень.

Використання матриці доступності забезпечило виключення відсутніх значень із процедур оцінювання, а лагові коваріаційні матриці дали змогу врахувати взаємозв'язки між компонентами у різні моменти часу.

Результати імітаційного моделювання підтвердили, що за помірної частки пропущених даних основні закономірності просторово-часової структури зберігалися, тоді як збільшення неповноти призводило до поступового порушення узгодженості між окремими реалізаціями процесу.

Додатково слід зазначити, що сформоване представлення просторово-часових залежностей може бути використане як основа для подальшого виявлення структурних змін, аномальних станів і порушень узгодженості між окремими компонентами багатовимірного процесу.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості їх застосування в інформаційних системах моніторингу, де дані надходять нерівномірно, містять пропуски або формуються з декількох взаємопов'язаних джерел. Подальші дослідження доцільно спрямувати на оцінювання стійкості сформованої просторово-часової структури за різних рівнів шуму, частки відсутніх спостережень і характеру розподілу пропусків.

6 ВИСНОВКИ

Удосконалено підхід до аналізу просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень, відмінною особливістю якого є формування лагових статистичних залежностей окремо для кожної пари компонентів за множиною фактично доступних спільних спостережень без попереднього відновлення пропущених значень. На цій основі сформовано узагальнену блочну матрицю, що поєднує міжкомпонентні та часові залежності процесу та використовується для виділення його домінантних структурних компонентів.

Імітаційне моделювання підтвердило можливість виявлення структурних закономірностей за наявності випадкових і локально згрупованих пропусків. Отримані результати можуть бути використані для подальшого аналізу багатовимірних інформаційних процесів в умовах неповноти даних.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори заявляють про відсутність фінансових та нефінансових конфліктів інтересів, які могли б вплинути на проведення дослідження, інтерпретацію отриманих результатів або підготовку матеріалів статті.

Література

1. Tsang A. H. C. Condition-based maintenance: tools and decision making. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*. 1995. Vol. 1, No. 3. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1108/13552519510096350>
2. Goyal D., Pabla B. S. The Vibration Monitoring Methods and Signal Processing Techniques for Structural Health Monitoring: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2016. Vol. 23. P. 585–594. <https://doi.org/10.1007/s11831-015-9145-0>
3. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
4. Mnasri Z., Bouwmans T. A novel method for anomaly detection using graph signal embedding: Application to anomalous sound detection. *Expert Systems with Applications*. 2026. Vol. 321. 132278. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2026.132278>.
5. Tamer, K. A., Sova, O., Shaposhnikova, O., Yashchenok, V., Stanovska, I., Shostak, S., Rudenko, O., Petruk, S., Matsyi, O., Kashkevich, S. (2024). Development of a solution search method using a combined bio-inspired algorithm. *EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies*, 1 (4 (127)), 6–13. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298205>.
6. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyy, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>.
7. S. O. Hnatyuk, R. Sh. Berdybayev, V. M. Sydorenko, O. K. Zhigarevych, & T. V. Smirnova, "Event correlation and cybersecurity incident management system at critical infrastructure facilities," *Cybersecurity: Education, Science, Technology*, 3(19), 176–196, 2023. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2023.19.176196>
8. M. Ikermane, M. Mohy-eddine, and Y. Rachidi, "Credit Card Fraud Detection: Comparing Random Forest and XGBoost Models with Explainable AI Interpretations," In *Innovative Technologies on Electrical Power Systems for Smart Cities Infrastructure*. ICESST 2024, 126–135. Aboudrar, I., Ilahi Bakhsh, F., Nayyar, A., Ouachtouk, I., Eds.; Sustainable Civil Infrastructures; Springer: Cham, Switzerland, 2025. https://doi.org/10.1007/978-3-031-86705-7_12
9. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
10. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," *Expert Syst. Appl.* 193, 116429, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
11. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
12. Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (1). 95–107. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.

References

1. Tsang A. H. C. Condition-based maintenance: tools and decision making. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*. 1995. Vol. 1, No. 3. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1108/13552519510096350>

2. Goyal D., Pabla B. S. The Vibration Monitoring Methods and Signal Processing Techniques for Structural Health Monitoring: A Review. Archives of Computational Methods in Engineering. 2016. Vol. 23. P. 585–594. <https://doi.org/10.1007/s11831-015-9145-0>
3. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
4. Mnasri Z., Bouwmans T. A novel method for anomaly detection using graph signal embedding: Application to anomalous sound detection. Expert Systems with Applications. 2026. Vol. 321. 132278. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2026.132278>.
5. Tamer, K. A., Sova, O., Shaposhnikova, O., Yashchenok, V., Stanovska, I., Shostak, S., Rudenko, O., Petruk, S., Matsyi, O., Kashkevich, S. (2024). Development of a solution search method using a combined bio-inspired algorithm. EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (127)), 6–13. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298205>.
6. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyy, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>
7. S. O. Hnatyuk, R. Sh. Berdybayev, V. M. Sydorenko, O. K. Zhigarevych, & T. V. Smirnova, "Event correlation and cybersecurity incident management system at critical infrastructure facilities," Cybersecurity: Education, Science, Technology, 3(19), 176–196, 2023. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2023.19.176196>
8. M. Ikermane, M. Mohy-eddine, and Y. Rachidi, "Credit Card Fraud Detection: Comparing Random Forest and XGBoost Models with Explainable AI Interpretations," In Innovative Technologies on Electrical Power Systems for Smart Cities Infrastructure. ICESST 2024, 126–135. Aboudrar, I., Ilahi Bakhsh, F., Nayyar, A., Ouachtouk, I., Eds.; Sustainable Civil Infrastructures; Springer: Cham, Switzerland, 2025. https://doi.org/10.1007/978-3-031-86705-7_12
9. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
10. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," Expert Syst. Appl. 193, 116429, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
11. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
12. Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 95–107. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.

Кашкевич Світлана Олександрівна

PhD., доцент

svitlana.kashkevych@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0009-0007-2406-8535](https://orcid.org/0009-0007-2406-8535)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Дехтяренко Артем Тарасович

Молодший науковий співробітник

dekhtiarenkoartem.99@gmail.com,

[ORCID: 0009-0007-8476-6132](https://orcid.org/0009-0007-8476-6132)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Брановицька Ірина Василівна

Старший викладач

iryna.branovytska@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0001-6397-6164](https://orcid.org/0000-0001-6397-6164)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Голего Наталія Миколаївна

Старший викладач

nataliia.holeho@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0002-6430-8659](https://orcid.org/0000-0002-6430-8659)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Стаття надійшла до редакції 13.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Кашкевич С.О., Дехтяренко А.Т., Брановицька І.В., Голего Н.М. Аналіз просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 27–37.

For references:

S. Kashkevych, A. Dekhtiarenko, I. Branovytska, N. Holeho (2026). Analysis of the spatio-temporal structure of multidimensional information processes under incomplete observations. Mechanics and mathematical methods. VIII (2). 27–37.

[Аналіз просторово-часової структури багатовимірних інформаційних процесів за неповних спостережень](#)
© 2026 by [Кашкевич С.О., Дехтяренко А.Т., Брановицька І.В., Голего Н.М.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 004.94:519.21

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО МЕТОДУ ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНІВ ХАОТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нечипорук О.П.¹, Апенько Н.В.¹, Бузун О.Г.¹, Тупота Є.В.¹

¹Національний університет «Київський авіаційний інститут»

Анотація: У роботі розроблено математичний метод прогнозування станів хаотичних динамічних систем з урахуванням локальної нелінійності, спектральних властивостей оператора переходу та обмеженої передбачуваності хаотичних процесів. Актуальність дослідження зумовлена високою чутливістю хаотичних систем до початкових умов, унаслідок чого незначні похибки оцінювання поточного стану спричиняють розходження прогнозованої та фактичної траєкторій зі збільшенням горизонту прогнозування. Запропонований метод передбачає реконструкцію багатовимірного простору станів за часовою послідовністю, формування локальної області атратора та побудову квадратичного нелінійного оператора еволюції.

Наукова новизна полягає у поєднанні локального прогнозування стану, аналізу дотичної динаміки та оцінювання прогнозованої невизначеності в єдиній математичній процедурі. Для локальної характеристики переходу використано матрицю Якобі, тоді як накопичене скінченно-часове деформування оцінювалося за сингулярним спектром результуючого оператора переходу. Поширення прогнозованої невизначеності виконувалося з урахуванням квадратичної кривизни локального оператора. Допустимий горизонт прогнозування визначався адаптивно за спільною умовою неперевищення допустимого розміру області невизначеності та граничної інтенсивності локального розходження траєкторій.

Для перевірки працездатності методу проведено імітаційне моделювання системи Лоренца у середовищі Python. Результати показали, що на початковому інтервалі прогнозована траєкторія зберігала близькість до фактичної, тоді як зі збільшенням горизонту спостерігалось закономірне зростання похибки. Встановлено, що запропонований підхід дозволяє не лише формувати прогноз майбутнього стану, а й визначати часову область, в межах якої прогноз залишається практично інформативним для досліджуваної системи.

Ключові слова: хаотична динамічна система, прогнозування станів, нелінійний оператор, реконструкція простору станів, локальна нестійкість, спектральний аналіз, горизонт прогнозування, імітаційне моделювання.

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL METHOD FOR PREDICTING THE STATES OF CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS

O. Nechiporuk¹, N. Apenko¹, O. Buzun¹, Y. Tupota¹

¹National University "Kyiv Aviation Institute"

Abstract: This paper presents a mathematical method for predicting the states of chaotic dynamic systems, taking into account local non-linearity, the spectral properties of the transition operator, and the limited predictability of chaotic processes. The relevance of the research stems from the high sensitivity of chaotic systems to initial conditions, as a result of which minor errors in estimating the current state cause discrepancies between the predicted and actual trajectories as the prediction horizon increases. The proposed method involves reconstructing the multidimensional state space along a time sequence, defining a local attractor region and constructing a quadratic nonlinear evolution operator.

The scientific novelty lies in the combination of local state prediction, analysis of tangential dynamics and estimation of prediction uncertainty within a single mathematical procedure. The



Jacobian matrix was used for the local characterisation of the transition, whilst the accumulated finite-time deformation was estimated using the singular spectrum of the resulting transition operator. The propagation of forecast uncertainty was carried out taking into account the quadratic curvature of the local operator. The permissible forecast horizon was determined adaptively based on a combined condition of not exceeding the permissible size of the uncertainty region and the limit intensity of local divergence of trajectories.

To verify the effectiveness of the method, a simulation of the Lorenz system was carried out in Python. The results showed that, over the initial interval, the predicted trajectory remained close to the actual one, whilst a systematic increase in error was observed as the forecast horizon increased. It was established that the proposed approach allows not only for the generation of a forecast of the future state, but also for the determination of the time domain within which the forecast remains practically informative for the system under study.

Keywords: chaotic dynamical system, state prediction, nonlinear operator, state-space reconstruction, local instability, spectral analysis, forecast horizon, simulation modelling.

1 ВСТУП

Прогнозування станів хаотичних динамічних систем є складною задачею через нелінійність процесів, високу чутливість до початкових умов та швидке накопичення похибок зі збільшенням горизонту прогнозу.

Для таких систем недостатньо використовувати лише класичні методи екстраполяції часових послідовностей, оскільки вони не враховують локальну структуру простору станів і характер розходження траєкторій.

Тому актуальним є формування математичних методів, що поєднують реконструкцію стану, оцінювання локальної нелінійної динаміки та визначення допустимого горизонту прогнозування.

Методи математичного забезпечення складних інформаційних систем і прийняття рішень, що ґрунтуються на формалізованому представленні станів та їх взаємозв'язків, розглянуто у [1]. Подальший розвиток таких підходів потребує врахування саме хаотичного характеру досліджуваних процесів та зміни їх передбачуваності в часі.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Питання математичного опису складних інформаційних процесів за наявності шумів та невизначеності розглядалися у [2], а методологічні підходи до оцінювання стану складних організаційно-технічних систем [3]. У роботі [4] запропоновано математичну модель надійних структур інформаційно-керуючих систем, що підтверджує доцільність використання формалізованого опису структурних взаємозв'язків між станами систем.

Проблеми передачі та обробки інформації в умовах невизначеності досліджувалися у [5], тоді як у [6] для опису складних нелінійних перетворень використано комплексні нейронні мережі.

Методи пошуку зв'язків у складних багатопараметричних просторах на основі популяційної оптимізації розглянуто у [7]. Підходи [5–7] демонструють ефективність нелінійного й оптимізаційного опрацювання даних, однак безпосередньо не вирішують задачу прогнозування еволюції хаотичних станів.

У роботах [8–9] досліджено методи виявлення відхилень і аномальних станів у складних інформаційних середовищах. Математичний опис адаптивного керування потоками даних наведено у [10], де враховано динамічну зміну параметрів інформаційного процесу.

Безпосередньо просторово-часова хаотична динаміка дискретно-неперервних систем досліджена у [11], що підтверджує необхідність урахування структурних змін і нестійкості траєкторій під час аналізу таких процесів.

У [12] розглянуто функціонування інформаційної системи на основі багатовимірних часових рядів, що створює передумови для переходу від аналізу окремих спостережень до багатовимірного представлення стану системи.

Таким чином, відомі підходи охоплюють окремі складові аналізу нелінійних динамічних процесів, зокрема реконструкцію багатовимірного представлення стану, локальне моделювання динаміки, дослідження нестійкості траєкторій та аналіз часових рядів. Водночас недостатньо опрацьованим залишається їх спільне використання в межах єдиної процедури прогнозування, у якій локальна нелінійна модель не лише формує майбутній стан, а й використовується для оцінювання накопиченого деформування фазового простору та зміни прогнозованої невизначеності.

Особливо актуальним є визначення допустимого горизонту прогнозування не як наперед заданої кількості кроків, а як характеристики, що залежить від локальної

геометрії траєкторії, інтенсивності скінченно-часового розходження близьких станів та розміру області прогнозовної невизначеності.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю дослідження є розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем шляхом моделювання локальної нелінійної еволюції, оцінювання спектральних характеристик операторів переходу та адаптивного визначення допустимого горизонту прогнозування.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для розробки математичного методу прогнозування станів хаотичної динамічної системи було використано локальне представлення нелінійного оператора її еволюції. Вихідна часова послідовність розглядалася як проєкція траєкторії системи у просторі станів. Тому прогнозування виконувалося не шляхом екстраполяції окремого значення, а шляхом оцінювання переходу між послідовними станами реконструйованого атрактора.

Наукова новизна запропонованого методу полягає не в окремому використанні реконструкції простору станів, матриці Якобі, спектрального аналізу або сингулярного розкладання, а у їх функціональному об'єднанні в єдиній математичній конструкції прогнозування. Локально ідентифікований квадратичний оператор одночасно використовується для рекурентного формування прогнозованих станів і побудови локального дотичного відображення. Послідовність отриманих матриць Якобі композиціюється на заданому часовому інтервалі, після чого за сингулярним спектром результуючого оператора оцінюється накопичене скінченно-часове деформування фазового простору. Паралельно з цим виконується поширення прогнозовної невизначеності з урахуванням квадратичної кривизни локального оператора.

У результаті допустимий горизонт прогнозування визначається спільно за динамічною нестійкістю та геометричним розширенням області невизначеності.

Вихідну послідовність x_k було перетворено до реконструйованого стану:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\tau} \\ \vdots \\ x_{k-(m-1)\tau} \end{bmatrix}, \quad k = (m-1)\tau + 1, \dots, N. \quad (12)$$

Сукупність отриманих станів утворювала реконструйовану траєкторію хаотичної системи (1). Для кожного її поточного положення формувалася локальна область, геометрія якої визначалася не звичайною евклідовою відстанню, а локальною коваріаційною структурою:

$$C_k = \frac{1}{K-1} \sum_{j \in \Omega_k} (z_j - \bar{z}_k)(z_j - \bar{z}_k)^T + \eta I, \quad \Omega_k = \{j : (z_j - z_k)^T C_k^{-1} (z_j - z_k) \leq \varepsilon^2\}. \quad (13)$$

В межах Ω_k динаміка розглядалася як локально гладка, однак не лінійна (2). Для збереження квадратичних взаємодій між фазовими координатами стан переносився до розширеного простору:

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z \otimes z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1+m+m^2}. \quad (14)$$

Для локальної області формувалися матриці Φ_k^T та Z_k^+ , що містили відповідно перетворені поточні стани та фактичні стани системи на наступному часовому кроці. Оператор переходу визначався регуляризованим розв'язком:

$$\Theta_k = Z_k^+ W_k \Phi_k^T \left(\Phi_k W_k \Phi_k^T + \lambda I \right)^{-1}. \quad (15)$$

Отриманий оператор поділявся відповідно до лінійної та квадратичної частин локальної еволюції:

$$\Theta_k = [a_k \quad A_k \quad B_k], \quad F_k(z) = a_k + A_k z + B_k(z \otimes z). \quad (16)$$

В результаті багатокроковий прогноз формувався послідовним застосуванням локального нелінійного оператора:

$$\hat{z}_{k+r+1|k} = F_{k+r}(\hat{z}_{k+r|k}), \quad \hat{z}_{k|k} = z_k. \quad (17)$$

Однак для хаотичної системи самого отримання $\hat{z}_{k+r|k}$ було недостатньо. Необхідно було встановити, як змінюється мале відхилення початкового стану під дією побудованого оператора. Лінеаризація (5) поблизу z_k приводила до матриці:

$$J_k = A_k + B_k(I \otimes z_k + z_k \otimes I). \quad (18)$$

Локальні множники розширення або стискання траєкторії було визначено коренями характеристичного рівняння. Для тривимірного реконструйованого стану воно набувало вигляду:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0. \quad (19)$$

Власні значення матриці J_k використовувалися для спектральної характеристики локально лінеаризованого однокрокового відображення. Їх положення у комплексній площині характеризує поведінку окремих власних мод локального оператора. Водночас власні значення не ототожнювалися з максимальними коефіцієнтами розтягнення фазового простору.

Для ненормальної матриці J_k , власні вектори якої не є ортогональними, можливе скінченно-часове підсилення норми збурення, яке не визначається безпосередньо модулями власних значень. Тому характеристичне рівняння (8) використовувалося для модального аналізу локального переходу, тоді як оцінювання фактичного скінченно-часового розтягнення виконувалося за сингулярними числами результуючого оператора

Коефіцієнти цього рівняння безпосередньо було визначено інваріантами локальної матриці переходу:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(J_k), \\ I_2 &= \frac{1}{2} [\text{tr}^2(J_k) - \text{tr}(J_k^2)], \\ I_3 &= \det(J_k). \end{aligned} \quad (20)$$



Для подальшого аналізу характеру коренів у рівнянні (8) виконувалася заміна. Для визначення основних просторово-часових закономірностей було виконано спектральне розкладання:

$$\lambda = u + \frac{I_1}{3}, \quad u^3 + pu + q = 0, \quad p = I_2 - \frac{I_1^2}{3}, \quad q = \frac{I_1 I_2}{3} - I_3 - \frac{2I_1^3}{27}. \quad (21)$$

Після перетворення характеристичного рівняння до форми (10) оцінювання локальної динаміки було продовжено шляхом визначення повного спектра оператора переходу. На відміну від використання одного домінантного кореня, враховувалися всі три спектральні компоненти, оскільки їх взаємне розташування визначало характер деформації локальної області атрактора та подальше розходження прогнозованих станів.

Для цього дискримінант і три спектральні гілки було об'єднано у матричне представлення:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \\ c_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}}, \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_+ \\ c_- \end{bmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}. \quad (22)$$

Отриманий спектр характеризував локальний режим еволюції реконструйованого стану. Проте для хаотичної системи прогнозованість визначалася не властивостями одного переходу, а накопиченим деформуванням траєкторії протягом усього горизонту прогнозу.

Для оцінювання накопиченої зміни норми малого збурення аналізувався вже не спектр окремої матриці J_k , а результуючий оператор $T_{k,h}$, сформований композицією локальних матриць Якобі.

Його сингулярні числа визначають максимальні та мінімальні коефіцієнти підсилення норми збурення за весь інтервал $h\Delta t$. Саме тому сингулярний спектр використовувався для характеристики скінченно-часової деформації, тоді як власні значення J_k зберігали інтерпретацію локальних модальних характеристик:

$$T_{k,h} = J_{k+h-1} J_{k+h-2} \cdots J_{k+1} J_k, \\ T_{k,h} = U_{k,h} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix} V_{k,h}^T, \quad (23) \\ \Lambda_{k,h}^{(i)} = \frac{1}{h\Delta t} \ln \sigma_i(T_{k,h}).$$

Величини $\Lambda_{k,h}^{(i)}$, визначені у (12), у роботі інтерпретувалися як оцінки скінченно-часових показників Ляпунова, реконструйованої динаміки, а не як новий самостійний показник хаотичності.

Їх особливість у межах запропонованого методу полягає у способі формування дотичного оператора: $T_{k,h}$ отримувався не з відомої аналітичної моделі системи, а шляхом композиції матриць Якобі локально ідентифікованого квадратичного відображення. Додатні значення $\Lambda_{k,h}^{(i)}$ відповідали середньому експоненційному розтягненню збурень уздовж відповідних сингулярних напрямів протягом інтервалу $h\Delta t$, від'ємні – їх стисканню. На відміну від асимптотичних показників Ляпунова, ці величини залежать від початкового стану та конкретної тривалості аналізованого інтервалу.

Оскільки нелінійна модель (5) містила квадратичні складові, звичайного перенесення коваріації через матрицю Якобі було недостатньо. Для врахування кривизни оператора еволюції прогноз математичного сподівання та коваріації виконувався із поправкою другого порядку:

$$\hat{z}_{r+1} = F_r(\hat{z}_r) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{tr}(H_{1,r} P_r) \\ \text{tr}(H_{2,r} P_r) \\ \vdots \\ \text{tr}(H_{m,r} P_r) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$P_{r+1} = J_r P_r J_r^T + Q_r + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{tr}(H_{1,r} P_r H_{1,r} P_r) & \cdots & \text{tr}(H_{1,r} P_r H_{m,r} P_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(H_{m,r} P_r H_{1,r} P_r) & \cdots & \text{tr}(H_{m,r} P_r H_{m,r} P_r) \end{bmatrix}.$$

У виразі (13) нелінійне викривлення локального потоку безпосередньо впливало як на центр прогнозованого стану, так і на форму області його невизначеності. У результаті зростання невизначеності визначалося не тільки накопиченням випадкової похибки, а й геометрією хаотичного відображення, що особливо суттєво при збільшенні горизонту прогнозу.

Завершальним етапом методу стало визначення області допустимого прогнозування. Для кожного горизонту формувалася еліпсоїдна область станів, після чого одночасно контролювалися її максимальний розмір та інтенсивність локального експоненційного розходження:

$$\mathcal{E}_{k,h} = \{z : (z - \hat{z}_{k+h|k})^T P_{k+h|k}^{-1} (z - \hat{z}_{k+h|k}) \leq \chi_m^2 (1 - \alpha)\},$$

$$r_{k,h} = \sqrt{\chi_m^2 (1 - \alpha) \lambda_{\max}(P_{k+h|k})}, \quad (25)$$

$$H_k^* = \max_i \Lambda_{k,h}^{(i)} \leq \Lambda_{\text{adm}}(h).$$

У результаті прогнозування завершувалося не фіксованим наперед числом кроків, а визначенням H_k^* , яке залежало від поточного положення траєкторії на атракторі.

Отже, друге обмеження критерію визначає максимально допустиму швидкість експоненційного підсилення початкової невизначеності до рівня Λ_{adm} протягом горизонту $h\Delta t$. Таким чином, значення допустимого горизонту визначається не незалежними емпіричними порогами, а єдиним бюджетом допустимої прогновної похибки. У ділянках із помірним розтягненням фазового простору допустимий горизонт збільшувався, тоді як проходження через локально нестійкі області приводило до його скорочення. Таким чином, розроблений метод поєднав нелінійне прогнозування стану, спектральний аналіз локальної еволюції, оцінювання деформації траєкторій та поширення прогновної невизначеності в єдиній математичній процедурі.

Для перевірки розробленого математичного методу було проведено імітаційне моделювання прогнозування станів хаотичної динамічної системи в середовищі Python із використанням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib. Як тестову динамічну систему було використано систему Лоренца, що характеризується нелінійною взаємодією змінних та високою чутливістю траєкторій до малих змін початкового стану. Моделювання виконувалося для параметрів $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ з часовим кроком $\Delta t = 0,01$.

Загальна тривалість модельованого процесу становила 120 с. Початкова частина траєкторії використовувалася для формування множини відомих переходів між станами, на основі яких оцінювався локальний нелінійний оператор прогнозування. Для кожного поточного стану відбиралося $K = 80$ найближчих станів, після чого формувалася квадратичний базис локальної динаміки та визначалися параметри оператора переходу з регуляризациєю $\lambda = 10^{-6}$. Прогноз здійснювався рекурентно, тобто кожний отриманий стан використовувався як початковий для наступного кроку прогнозування.

Експеримент було спрямовано на перевірку двох властивостей методу. На першому етапі оцінювалася здатність локального нелінійного оператора відтворювати майбутню траєкторію хаотичної системи. На другому етапі досліджувалося накопичення відхилення прогнозованого стану від фактичної траєкторії зі збільшенням горизонту прогнозування. Це дозволило окремо оцінити точність короткострокового прогнозу та момент втрати передбачуваності, який є принциповим для хаотичних динамічних систем.

На рис. 1 наведено весь аттрактор, а саме як прогноз спочатку практично збігається з реальною траєкторією, а потім поступово починає від неї відходити.

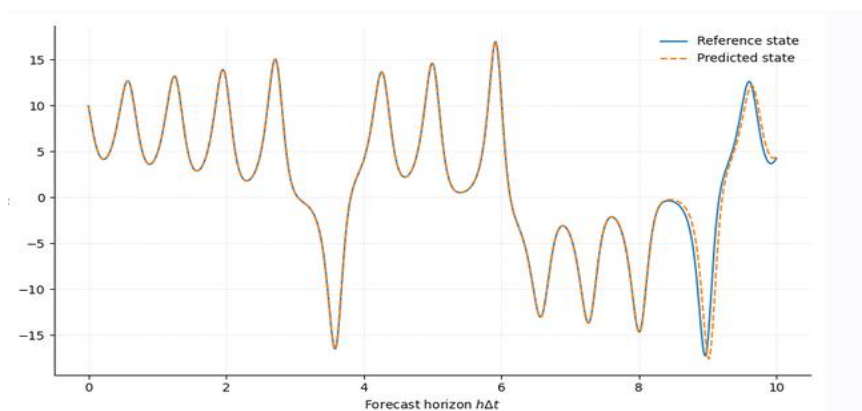


Рис. 1. Фактичний і прогнозований стан хаотичної системи

Отримані результати показали, що на початковій ділянці прогнозована траєкторія практично збігалася з фактичним станом системи. Зі збільшенням горизонту прогнозування спостерігалася поступове розходження траєкторій, що було зумовлено чутливістю хаотичної системи до малих похибок оцінювання стану.

На рис. 2 по осі X – горизонт прогнозування, а по осі Y у логарифмічному масштабі – норма відхилення. На рис. 2 видно експоненційну фазу росту помилки і точку, де вона перетинає допустимий рівень (12)–(14).

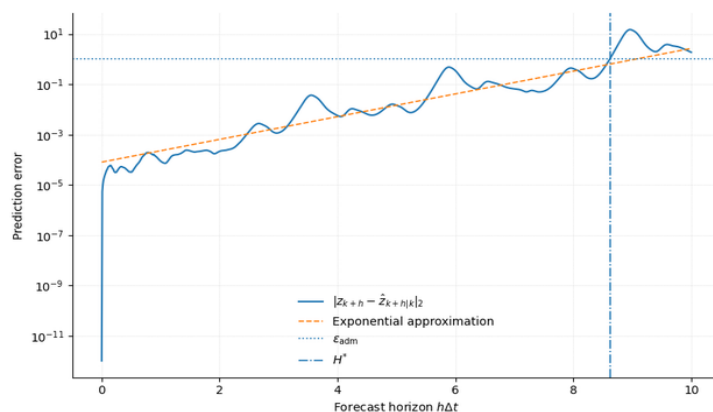


Рис. 2. Наростання прогнозової похибки і межа передбачуваності

Залежність похибки від горизонту прогнозування мала виражений зростаючий характер. Перетин кривої похибки з допустимим рівнем визначав граничний горизонт H^* , після якого прогноз втрачав практичну інформативність.

Отриманий результат підтвердив доцільність адаптивного обмеження горизонту прогнозування відповідно до локальної нестійкості хаотичної динаміки. Для додаткової кількісної перевірки запропонований метод порівнювався з локальним лінійним прогнозуванням за однакових параметрів моделювання. У базовому варіанті використовувалася лише лінійна складова оператора (5), тобто $B_k=0$, тоді як запропонований метод враховував також квадратичні взаємодії фазових координат.

Порівняння показало меншу прогнозну похибку для запропонованого методу та більш тривале збереження траєкторії в межах допустимого відхилення. Визначений за критерієм (14) горизонт H_k^* відповідав області, після виходу з якої спостерігалось інтенсивне зростання фактичної похибки, що підтверджує можливість використання критерію для адаптивного визначення межі практичної передбачуваності.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати показали, що розроблений математичний метод забезпечує формування короткострокового прогнозу станів хаотичної динамічної системи з урахуванням локальних властивостей її траєкторії.

Використання нелінійного оператора переходу дозволило відтворювати динаміку системи в межах області локальної передбачуваності, тоді як спектральний аналіз та оцінювання накопичення прогнозової похибки дали змогу визначати момент істотного розходження фактичної та прогнозованої траєкторій.

Принципова відмінність запропонованого методу від традиційного локального прогнозування полягає в тому, що локальна модель використовується не лише як апроксиматор переходу між станами. Її диференціальні властивості формують послідовність дотичних операторів, композиція яких характеризує накопичене скінченно-часове розтягнення, а нелінійна структура оператора одночасно використовується для поширення прогнозової невизначеності.

6 ВИСНОВКИ

У дослідженні розроблено математичний метод прогнозування станів хаотичних динамічних систем, у якому локально ідентифікований квадратичний оператор використовується як спільна основа для прогнозування стану, формування дотичної динаміки та оцінювання накопичення прогнозової невизначеності.

На відміну від окремого застосування локальної апроксимації або спектрального аналізу, запропонована конструкція поєднує композицію матриць Якобі, оцінювання скінченно-часових показників Ляпунова за сингулярним спектром результуючого оператора та поширення коваріації другого порядку з адаптивним визначенням допустимого горизонту прогнозування.

Порівняльне моделювання з локальним лінійним прогнозуванням підтвердило доцільність урахування квадратичних взаємодій між фазовими координатами та показало можливість кількісного визначення межі практичної передбачуваності. Узгодження розрахованого за критерієм (14) горизонту H_k^* з емпіричним моментом перевищення допустимої похибки підтверджує, що запропонований критерій може використовуватися для адаптивного припинення прогнозування в локально нестійких областях хаотичної траєкторії. Отримані результати підтвердили доцільність адаптивного визначення горизонту прогнозування для хаотичних динамічних систем.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори заявляють про відсутність фінансових та нефінансових конфліктів інтересів, які могли б вплинути на проведення дослідження, інтерпретацію отриманих результатів або підготовку матеріалів статті.

Література

1. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
2. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyu, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>
3. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
4. Al-Ammouri, A., Lebid, I., Dekhtiar, M., Lebid, Ye., & Al-Ammori, H. (2022). Development of a mathematical model of reliable structures of information-control systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/9(119), 68–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265953>
5. Gnatyuk, S., Kinzeryavyu, V., Polishchuk, Y., Nechyporuk, O., & Horbakha, B., Аналіз методів забезпечення конфіденційності даних, які передаються з БПЛА. Електронне фахове наукове видання "Кібербезпека: освіта, наука, техніка; 1(17), 167-186. <https://doi.org/10.28925/26634023.2022.17.167186>.
6. T. Dong and T. Huang. (2020). Neural Cryptography Based on Complex-Valued Neural Network. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Vol. 31, No. 11, 4999-5004.
7. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
8. N. Basta, M. Ikram, M. Kâafar, A. Walker, Towards a zero-trust micro-segmentation network security strategy: An evaluation framework, in: NOMS 2022 - IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium, 2021, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1109/NOMS54207.2022.9789888>.

9. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," *Expert Syst. Appl.* 193, 116429, 2022
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
10. Ластівка О.І., Нечипорук О.П. Математична модель адаптивного управління потоками даних у каналах зв'язку безпілотних літальних апаратів. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2026. 1. С. 36–42. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.26.1.4>
11. Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапущенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. № 1. С. 95–107. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.
12. Нечипорук, О. П., Подельський, С. В. (2026). Математична модель функціонування складної інформаційної системи на основі багатовимірних часових рядів. *Електроніка та системи управління*, 2(88), 61–68. <https://doi.org/10.18372/1990-5548.88.20967>.

References

1. Kashkevich S. Decision support systems: mathematical support. Kharkiv: TECHNOLOGY CENTER PC, 2025. 202. <https://doi.org/10.15587/978-617-8360-13-9>.
2. A. E. Qoussini, Y. I. Daradkeh, S. M. Al Tabib, S. Gnatyuk, T. Okhrimenko and V. Kinzeryavyy, "Improved Model of Quantum Deterministic Protocol Implementation in Channel with Noise," 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS), Metz, France, 2019, pp. 572-578, <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924287>
3. B. A. Mohammed, I. Stanovska, S. Kashkevich, A. Lebedynskyi, Y. Vakulenko, N. Protas, O. Klyuchak, O. Lastivka, A. Semeniuk, and O. Kivshar, "Development of a methodological approach for assessing the condition of complex organizational and technical systems," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(3(134)), 47–53, 2025. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326468>.
4. Al-Ammouri, A., Lebid, I., Dekhtiar, M., Lebid, Ye., & Al-Ammori, H. (2022). Development of a mathematical model of reliable structures of information-control systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/9(119), 68–78. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265953>
5. Gnatyuk, S., Kinzeryavyy, V., Polishchuk, Y., Nechyporuk, O., & Horbakha, B., Analysis of methods for ensuring the confidentiality of data transmitted from UAVs. *Electronic professional scientific journal 'Cybersecurity: Education, Science, Technology'*; 1(17), 167–186. <https://doi.org/10.28925/26634023.2022.17.167186>.
6. T. Dong and T. Huang. (2020). Neural Cryptography Based on Complex-Valued Neural Network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Vol. 31, No. 11, 4999-5004.
7. Yakymiak, S., Vdovytskyi, Y., Artabaiev, Y., Degtyareva, L., Vakulenko, Y., Nevhad, S., Andronov, V., Lazuta, R., Shapoval, P., & Artamonov, Y. (2023). Development of the solution search method using the population algorithm of global search optimization. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 3, No. 4 (123), pp. 39–46. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281007>.
8. N. Basta, M. Ikram, M. Kâafar, A. Walker, Towards a zero-trust micro-segmentation network security strategy: An evaluation framework, in: *NOMS 2022 - IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium*, 2021, pp. 1–7. doi:10.1109/NOMS54207.2022.9789888.
9. W. Hilal, S. A. Gadsden, and J. Yawney, "Fraud: A Review of Anomaly Detection Techniques and Recent Advances," *Expert Syst. Appl.* 193, 116429, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116429>
10. Lastivka O., Nechyporuk O. A Mathematical Model for Adaptive Data Flow Control in Communication Channels for Unmanned Aerial Vehicles. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2026. 1. P. 36–42. (in Ukrainian) <https://doi.org/10.34229/2707-451X.26.1.4>

11. Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 95–107.
<https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-95-107>.
12. Nechyporuk, O., Podelskyi, S. (2026). Information System Functioning Based on Multidimensional Time Series. Electronics and Control Systems, 2(88), 61–68.
<https://doi.org/10.18372/1990-5548.88.20967>

Нечипорук Олена Петрівна

д.т.н., професор

olena.nechyporuk@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0001-8203-7998](https://orcid.org/0000-0001-8203-7998)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Апенько Наталія Вікторівна

к.т.н., доцент

natalia.apenko@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0000-0001-6891-0869](https://orcid.org/0000-0001-6891-0869)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Бузун Олександр Геннадійович

Молодший науковий співробітник

sashabuzun2001@gmail.com,

[ORCID: 0009-0009-7828-2734](https://orcid.org/0009-0009-7828-2734)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Тупота Євгеній Вікторович

Старший викладач

yevhenii.tupota@npp.kai.edu.ua,

[ORCID: 0009-0006-7278-984X](https://orcid.org/0009-0006-7278-984X)

Національний університет «Київський авіаційний інститут»,
пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058

Стаття надійшла до редакції 13.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Нечипорук О.П., Апенько Н.В., Бузун О.Г., Тупота Є.Г. Розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 38–49.

For references:

O. Nechyporuk, N. Apenko, O. Buzun, Y. Tupota (2026). Development of a mathematical method for predicting the states of chaotic dynamical systems. Mechanics and mathematical methods. VIII (2). 38–49.

[Розробка математичного методу прогнозування станів хаотичних динамічних систем](#) © 2026 by [Нечипорук О.П., Апенько О.В., Бузун О.Г., Тупота Є.В.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

UDC 539.3:624.046.3

ON THE BUCKLING OF A ROD UNDER TENSILE FORCE

S. Bekshaev¹

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: This article examines the mathematical model of the loss of equilibrium stability of an elastic, rigidly clamped, rectilinear cantilever rod loaded with a longitudinal tensile force applied to a traverse rigidly fixed to the free end of the rod perpendicular to its axis. The study is carried out within the framework of linear rod theory under the standard assumption of small displacements. The way of applying the tensile force allows for frictionless movement of its application point along the traverse, as well as a change in its direction depending on the displacement of the free end of the rod and the slope of the traverse. Unlike the relatively few previously known formulations of problems on the buckling of rectilinear rods caused by tensile forces, this article imposes no restrictions on the distribution of the bending rigidity of the rod along its length. The study is theoretical in nature and is based on a qualitative analysis of the behavior of solutions to a linear differential equation for rod bending. To simplify the analysis, a transition was made from the traditional description of the deformed state in rod theory using a deflection function to a bending moment function. This allowed the solving to the rod buckling problem to be reduced to an eigenvalue problem for a second-order linear homogeneous differential equation for bending moments under homogeneous boundary conditions of a special type. Critical forces are determined as eigenvalues for which a solution to the differential equation exists that is not identically zero and satisfies the boundary conditions. For the constructed boundary problem, a theorem was formulated and proved, which states that with an arbitrary distribution of the bending stiffness of the rod along its length and with the ways of applying the tensile force adopted in the study, a single critical tensile force always exists at which the rod loses stability. The dependence of the critical force on the parameter characterizing the change in the position of the tensile force application point during rod buckling is qualitatively described. An increase in the critical force is also established when the rod is shortened by removing a portion near the clamp and transferring it to the end of the newly formed rod. A comparison of the obtained results with studies, including experimental ones, by other authors showed that the conditions considered in the article can be realized for rods operating in complex structures.

Keywords: tensile rod, loss of stability, boundary problem, critical force, qualitative analysis, existence and uniqueness.

ЩОДО ВТРАТИ СТІЙКОСТІ РОЗТЯГНУТОГО СТРИЖНЯ

Бекшаєв С. Я.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: У статті розглядається математична модель втрати стійкості рівноваги пружного жорстко зацмленого прямолінійного консольного стрижня, завантаженого поздовжньою розтягуючою силою, прикладеною до поперечної траверси, жорстко закріпленої на вільному кінці стрижня перпендикулярно до його осі. Дослідження здійснюється в межах лінійної теорії стрижней в стандартному припущенні малості переміщень. Спосіб прикладання розтягуючої сили допускає вільне від тертя переміщення уздовж траверси її точки прикладання, а також зміну її напрямку в залежності від переміщення вільного кінця стрижня і нахилу траверси. На відміну від порівняно небагатьох відомих раніше постановок задач про втрату стійкості прямолінійних стрижнів, спричинену розтягуючими силами, у запропонованій статті не накладається обмежень на розподіл згинальної жорсткості стрижня уздовж його довжини. Дослідження має теоретичний характер і спирається на якісний аналіз поведінки розв'язків лінійного диференціального рівняння вигину стрижня. З метою спрощення аналізу був виконаний перехід від традиційного для теорії стрижнів опису деформованого стану з використанням функції прогинів до функції згинальних моментів. Це дозволило привести



розв'язання питання втрати стійкості стрижня до розгляду задачі на власні значення для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку щодо згинальних моментів за однорідних граничних умов спеціального виду. Критичні сили визначаються як власні значення задачі, для яких існує розв'язок диференціального рівняння, що не дорівнює тотожному нулю і задовольняє граничним умовам. Для побудованої граничної задачі сформульовано і доведено теорему, яка встановлює, що при довільному розподілі згинальної жорсткості стрижня по його довжині при прийнятих у роботі способах прикладання розтягуючої сили завжди існує і до того ж єдина критична розтягуюча сила, при якій стрижень втрачає стійкість. Якісно описана залежність величини критичної сили від параметра, що характеризує зміну положення точки прикладання розтягуючої сили при згинанні стрижня. Встановлено також зростання критичної сили при укороченні стрижня шляхом видалення його частини поблизу защемлення з його перенесенням у кінець новоствореного стрижня. Зіставлення отриманих результатів із дослідженнями, в тому числі експериментальними, інших авторів, показали, що розглянуті у статті умови можуть бути реалізовані для стрижнів як елементів складних конструкцій.

Ключові слова: розтягнутий стрижень, втрата стійкості, гранична задача, критична сила, якісний аналіз, існування і єдиність.

1 INTRODUCTION

Problems of stability, particularly the stability of equilibrium configurations in engineering structures, have attracted the interest of engineers and scientists for nearly three centuries. Stability is a necessary quality of a structure, ensuring its reliable operation under the conditions envisaged by the design. Along technology advanced, the types of engineering structures became more complex and varied, and the intensity and diversity of the impacts on their elements increased, the range of corresponding problems and their solving methods expanded. In most cases in engineering practice, loss of structural stability occurs due to buckling of its elements under compression when the compressive load reaches a certain value, called the critical load. Therefore, the main content of the theory of equilibrium stability for mechanical systems developed to date consists of methods for determining critical loads, as well as methods for controlling them to prevent buckling due to compression. The possibility of buckling under tension is considered questionable by many engineers. At the same time, over the course of several decades, a number of publications have appeared examining the possibility of buckling of tensile members. However, their discussion was illustrative in nature and limited primarily to rods of constant cross-section. The present paper examines the buckling of a rod with an arbitrary distribution of flexural stiffness along its length, caused by a tensile force.

The mathematical content of the problem consists in the construction and qualitative study of a mathematical model of a tensile rod, which is based on a linear differential equation that determines the configuration of the deformed rod. The difference from previous works is the reduction of the problem to an eigenvalue problem for a second-order differential equation with variable coefficients and specific boundary conditions.

The article establishes the existence and uniqueness of the critical force as an eigenvalue of the problem for an arbitrary distribution of bending stiffness and its relationship to certain changes in parameters that characterize the conditions of fixing and application of the tensile load.

2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM STATEMENT

The development of formulations and methods for solving problems related to the study of the stability of mechanical systems has a rich and instructive history, reflected in well-known works [1-3]. To date, stability theory has grown into a vast and diversified field of science, rapidly developing alongside the creation of new engineering structures, materials, mathematical methods, and information technologies. The results of this development are reflected in classical works [4-6], as well as in new-generation monographs [7-9], which together represent a virtually exhaustive range of research areas. However, problems of equilibrium stability are considered almost exclusively in relation to the compression of structural elements. In recent decades, the possibility of buckling in thin plates under the action of tensile forces has been established and systematically studied [10-13]. Buckling of a tensile rod is still often regarded as a paradox of no practical significance. Some special cases were described in [6, 14, 15]. One of them, considered in [14] and close to that is studied in the proposed article, is shown in Fig. 1 *a*.

They represent rather elementary models for demonstrating the principal possibility of buckling caused by tensile forces than fragments of any general theory. Only in [15] an attempt was made to give a unified description of a certain set of ways for applying tensile load. However, the possibility of their structural implementation is not systematically discussed. Refusing to pursue any practical goals allowed to limit the considerations to rods with constant flexural rigidity along their length. Article [16] describes an interesting case of

buckling of a tensile rod formed from two parts connected in a special manner, allowing free relative transverse displacements of the connected sections (Fig. 1 *b*).

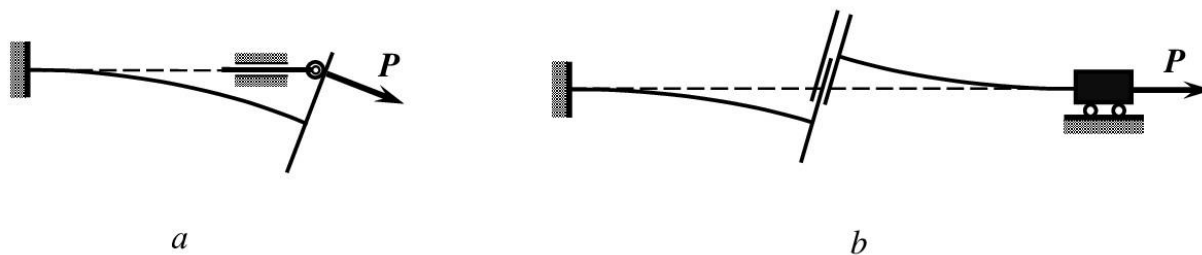


Fig. 1. Examples of loss of stability under tensile forces: *a* – by [14], *b* – by [16]

The bending of each individual part can be described as rod buckling, which is studied in this article. The buckling effect described in [16] is clearly demonstrated using a physically constructed model. A corresponding video is freely available online.

The present study uses a standard criterion of static stability ([15]), based on the existence of a non-trivial solution to the differential equation for bending of a tensile rod and on a qualitative study of the properties of solutions of this equation under the corresponding boundary conditions, since an arbitrary distribution of bending stiffness does not allow this solution to be expressed in an exact form.

3 THE PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The objective of this work is to study the buckling conditions of a rectilinear cantilever rod loaded by a longitudinal tensile force constant along its length (Fig. 2).

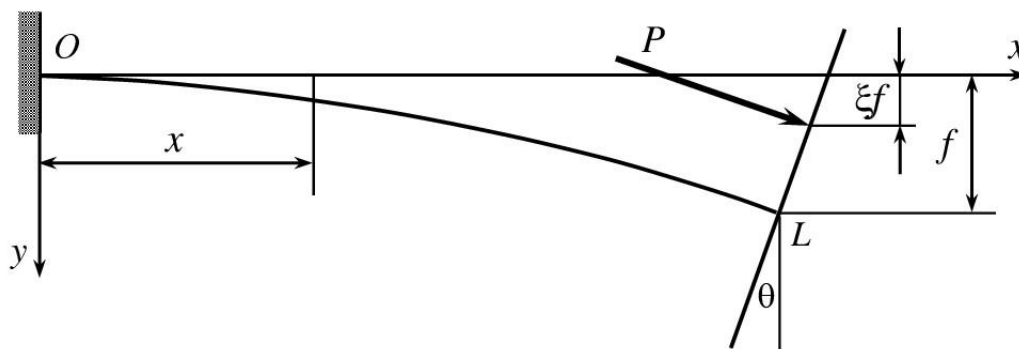


Fig. 2. Schematic buckling form of the rod under study

In extension of the previously considered formulations [6, 14, 15, 16], an arbitrary change in the bending stiffness along the length of the rod is allowed. In addition, it is assumed that the way of applying the tensile load at the free end allows a certain dependence of its direction and application point on the deflection and angle of rotation of the end cross-section. This way is one of those considered in [15] and, in principle, can be implemented without violating conservatism. As it turns out, this is precisely the way implemented for each of the two rods in Fig. 1 *b*. The proposed generalizations are motivated by the desire to study the conditions which may occur for tensile rod as an element of a compound structure.

4 RESEARCH RESULTS

4.1. Mathematical model description. We consider a cantilever rod OL , rigidly fixed at one end and having a traverse at its free end – an absolutely rigid transverse rod perpendicular to the axis of the bending rod (Fig. 2). It is assumed that the traverse is perfectly smooth, which implies that equilibrium of the rod loaded with force $\mathbf{P}$ is possible only when force $\mathbf{P}$ and the traverse are perpendicular.

The following notations are used:

$B = B(x) = EJ$ – bending stiffness of a rod, variable along its length;

ℓ – rod length;

P – the magnitude of the longitudinal tensile force perpendicular to the plane of the end section L of the rod;

$y = y(x)$ – deflection of a rod in section at a distance x from the clamped end;

$\varphi = \varphi(x)$ – slope of the section at a distance x from the clamped end;

f, θ – respectively, the deflection and the slope of the end section L of the rod;

$M = M(x)$ – bending moment in the section x .

ξ – the eccentricity coefficient of the tensile force, which determines the transverse displacement of its point of application at bending of the rod; it is accepted that $-\infty < \xi < 1$; at $\xi = 0$ we will call the rod centrally loaded.

The consideration is based on the linear theory of rods, which assumes small displacements and deformations.

The differential equation that determines the configuration $y(x)$ of a deformed rod in a linear approximation, taking into account the slope of the force $\mathbf{P}$, has the form

$$By'' = -M(x) = P\theta(\ell - x) - P(\xi f - y). \quad (1)$$

Here and below, the prime denotes the derivative with respect to the coordinate.

Differentiating both sides with respect to x , we obtain an equation for the slope $\varphi = \varphi(x) = y'$

$$(B\varphi)' = P\varphi - P\theta. \quad (2)$$

By introducing a new variable (bending moment) $M = -B\varphi'$ and again differentiating with respect to x , we get at a homogeneous equation

$$M'' = (P/B)M. \quad (3)$$

As can be seen from Fig. 2, the deflections and angles of inclination of the ends of the rod satisfy the relations

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\ell) = \theta, \quad y(0) = 0, \quad y(\ell) = f. \quad (4)$$

From (1) and (2) it follows

$$M(0) = -P\theta\ell + P\xi f, \quad M(\ell) = -Pf(1 - \xi), \quad M'(0) = P\theta, \quad M'(\ell) = 0, \quad (5)$$

from where, excluding f and θ , we obtain the homogeneous boundary conditions

$$M'(\ell) = 0, \quad M(0) + M'(0)\ell = -\frac{\xi}{1-\xi}M(\ell), \quad (6')$$

complementary to the equation (3).

4.2. Main theorem. The main mathematical result of the work is expressed by the following theorem.

Theorem (on existence and uniqueness of critical force). For any ξ , $-\infty < \xi < 1$, there is a unique value of $P = P(\xi)$, which corresponds to a nonzero solution of the differential equation (3), satisfying the boundary conditions (6). When ξ increases from $-\infty$ to 1 the value $P = P(\xi)$ increases monotonically from 0 to ∞ .

To prove the theorem, we establish a number of preliminary results.

4.3. Auxiliary results. Let us consider the solution $M(x)$ of equation (3) for some fixed P , satisfying only the first of the conditions (6), and accept $M(\ell) = \text{const.} > 0$.

In the interval $0 \leq x \leq \ell$, $M(x)$ retains its sign. Otherwise, there would exist x_1 , $0 < x_1 < \ell$, such that $M(x_1) = 0$ and $M(x) > 0$ at $x_1 < x \leq \ell$, from which it would follow that there exists such x_2 , $x_1 < x_2 < \ell$, for which $M'(x_2) > 0$, from which, in turn, it would follow that there exists such x_3 , $x_2 < x_3 < \ell$, for which $M''(x_3) < 0$, in contradiction with (3). Thus, $M(\ell) > 0 \Rightarrow M(x) > 0$ and on the basis of (3) $M''(x) > 0$ for everyone x , $0 \leq x \leq \ell$. This means that the graph of the function $M(x)$ is concave upwards (see Fig. 3).

From (3) the following relations follow

$$M'(x) = M'(x) - M'(\ell) = P \int_{\ell}^x \frac{M(s)}{B(s)} ds = -P \int_x^{\ell} \frac{M(s)}{B(s)} ds < 0, \quad (7)$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow M'(x_2) - M'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} M''(s) ds = P \int_{x_1}^{x_2} \frac{M(s)}{B(s)} ds > 0,$$

that allow us to conclude that the derivative $M'(x)$ on the interval of interest to us is negative and increases with increasing x , and that $M(x)$ decreases with increasing x .

For an arbitrary function $M(x)$ the identity holds

$$M(x) = M(\ell) - M'(\ell)(\ell - x) + \int_x^{\ell} M''(s)(s - x) ds,$$

which can be verified by calculating the integral by parts.

From here, taking into account (3) and the initial condition (6), we arrive at the equality

$$M(x) = M(\ell) + P \int_x^{\ell} \frac{M(s)}{B(s)} (s - x) ds. \quad (8)$$

From relation (7) we find

$$M'(0) \cdot \ell = -P \int_0^{\ell} \frac{M(s)}{B(s)} \cdot \ell \cdot ds, \quad (9)$$

which in combination with (8) gives

$$M(0) + M'(0)\ell = M(\ell) + P \int_0^{\ell} \frac{M(s)}{B(s)} (s - \ell) ds. \quad (10)$$

The bending moment M as a function of P increases with increasing P . To verify this, let us consider two functions M and M_1 , corresponding respectively to the values P and P_1 , $P_1 > P$, at $M_1(\ell) = M(\ell) > 0$. Due to the continuity of the second derivative $M''(x)$ and to the equation (3), there is a certain neighborhood of the right end L of the rod, where $M_1(x) > M(x)$. If we assume that for some x the opposite inequality $M_1(x) \leq M(x)$ holds, there must exist such x^* that $M_1(x^*) = M(x^*)$ and $M_1(x) > M(x)$ for $x^* < x < \ell$ in contradiction with equality (8). The same equality shows that the growth of M as a function of P is unlimited.

4.4. Proof of the theorem. The right side of (10) decreases monotonically from $M(\ell)$ to $-\infty$ as P increases from 0 to ∞ . Therefore, the expression $M(0) + M'(0)\ell$ in the boundary condition (6) also decreases monotonically from $M(\ell)$ to $-\infty$, becoming exactly once equal to $-(\xi/1-\xi)M(\ell)$ for a given ξ , $-\infty < \xi < 1$. This means that for any ξ of the range $-\infty < \xi < 1$ there is a unique value P for which there is a non-trivial solution to equation (3) that satisfies both boundary conditions (6). This value represents the only critical force of the considered rod loaded with a tensile longitudinal force

The expression $M(0) + M'(0)\ell$ graphically represents the ordinate of the point of intersection of the tangent to the graph of the function $M(x)$, drawn at $x=0$, with the vertical $x=\ell$ (Fig. 3). As P increases, this point moves downwards, monotonically and unlimitedly. The expression $-(\xi/1-\xi)M(\ell)$ decreases monotonically from $M(\ell)$ to $-\infty$ as ξ increases from $-\infty$ to 1. A larger value ξ corresponds to a larger value P satisfying the second condition (6), i.e. the critical force of the rod increases monotonically with the growth of the coefficient ξ . The theorem is proven.

4.5. Corollary. Shortening a rod clamped at one end, with a corresponding transfer of the fixation conditions to the end of the shortened rod, leads to an increase in the critical force, regardless of the law of distribution of bending rigidity along the length of the rod.

Proof. Any value $P > 0$ is the critical force of the rod under consideration at certain value $\xi = \xi(P)$ between $-\infty$ and 1. This value is uniquely determined by the point of intersection of the tangent to the curve $M(x)$ at the point $x=0$ with the vertical $x=\ell$ (Fig. 3).

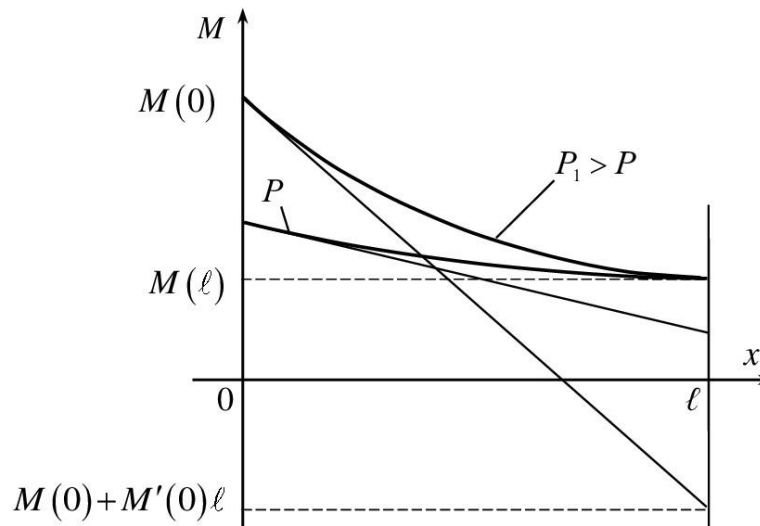


Fig. 3. Schematic graphs of the function $M(x)$, $P_1 > P$

If we draw another tangent to the same curve at the point $x' > 0$, then due to the absence of inflection points on the curve, the corresponding point of intersection with the vertical $x = \ell$ will be higher, and it will correspond to the value $\xi' < \xi(P)$. This means that the critical force P of a rod clamped at the left end $x = 0$ is at the same time the critical force of a shortened rod clamped in section x' , but with a smaller coefficient ξ . Since, as established above, growth ξ leads to an increase in the critical force, it can be concluded that when $\xi = \xi(P)$ the shortened rod will have a critical force $P' > P$. Thus, the well-known result for the critical forces of compressed rods is established for a rod in tension. The corollary is proven.

4.6. On the physical realization of the loss of stability of a rod under tension This paper does not consider questions of structural implementation of ways for applying tensile forces in which the coefficient ξ will be nonzero. Such conditions may arise in structures containing, among other, tensile rods.

In [16], the behavior of a rod composed of two elastic rods similar to the one considered above was investigated. Each of these rods is rigidly clamped at one end and has a traverse at the opposite free end – an absolutely rigid rod element perpendicular to the axis of the rod. The rods are connected at their free ends using a slider – a device that equalizes the slopes of the connected end cross sections, but allows their relative sliding without friction in a direction perpendicular to the axes of the deformed rods at their connection (Fig. 1b, Fig. 4).

At buckling, the rods act on each other with systems of forces distributed over the contact surface of the perfectly smooth traverses and directed perpendicular to the traverses. Both systems have resultants applied at some point K on this surface, which, according to the well-known law of equality of action and reaction, are equal in magnitude and opposite in direction. The point K must be located between the end sections L_1 and L_2 of the rods. Otherwise, both rods would have the same curvature sign.

This allows us to consider each of the rods as a rod shown in Fig. 2, with the corresponding value of ξ . If the point K does not lie on the axis of the undeformed rod (the dotted line in Fig. 4), it will be displaced from this axis in the same direction as the end of one of the rods. If this is L_1 , then, as can be seen from the figure, $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$.

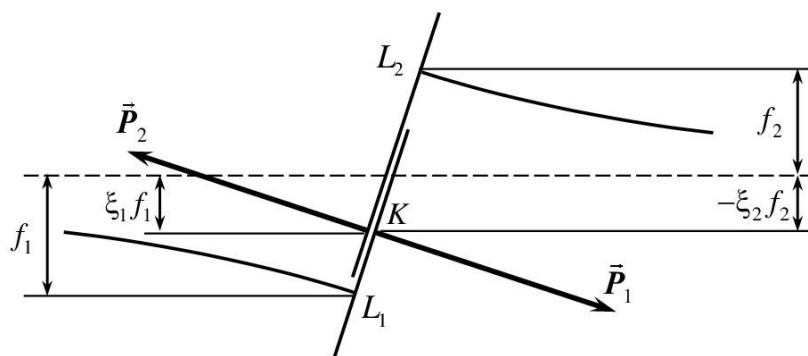


Fig. 4. Interaction of rods in a structure shown in Fig. 1 b

Let us denote by P_0 the critical force of a centrally loaded rod (for which $\xi = 0$). When $\xi < 0$ the inequality $P < P_0$ is satisfied, and when $\xi > 0$ the inequality $P > P_0$ is satisfied.

It was established above that the critical force increases monotonically with increasing ξ . This means that the critical force P of the composite rod satisfies the relations

$P_{10} < P < P_{20}$, where P_{10} and P_{20} are, respectively, the critical forces of the left and right rods at $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

4.6. Expansion of the fixing conditions. In the previous discussion, it was assumed that the clamping of the left end O of the rod is absolutely rigid. It can be verified that all the stated conclusions remain valid even for finite clamping rigidity. In this case, in (4), instead of the boundary condition $\varphi(0) = 0$, the condition $M(0) = -\alpha\varphi(0)$, $\alpha = \text{const.} > 0$, should be adopted. In (5) instead of $M'(0) = P\theta$ you should write $M'(0) = P\theta - P\varphi(0)$. After excluding f and θ the second of the conditions (6) will take the form

$$M(0) + M'(0)\ell - \frac{P}{\alpha}M(0) = -\frac{\xi}{1-\xi}M(\ell). \quad (6)$$

As we see, the left-hand side of (6'), as in (6), decreases monotonically with increasing P , which implies the existence and uniqueness of the critical force, which increases monotonically with increasing ξ . We also note that the left-hand side of (6') increases with increasing α , which implies that, all other things being equal, the critical force increases monotonically with increasing clamping rigidity α .

5 RESEARCH RESULTS DISCUSSION

The results presented in this article confirm and, to some extent, complement those established in previously published studies on the possibility of buckling of rods caused by tensile forces.

The fact of loss of stability of rod under tension for an arbitrary distribution of bending rigidity along its length has been established.

The existence and uniqueness of a critical tensile force for a rod under certain conditions of fixation and loading is established.

The dependence of the critical force on the conditions of fixation and longitudinal loading of the rod was investigated. Specifically, the monotonicity of the critical force as a

function of the parameter ξ characterizing the position of the longitudinal force application point was established.

A connection is noted between the problems of buckling of an individual tensile rod and a compound structure, previously studied independently.

6 CONCLUSIONS

The studies presented in this paper complement and expand on the still few and unsystematized descriptions of buckling of rods under the action of tensile forces.

The obtained results can be applied in studying the behavior of mechanical systems containing longitudinally loaded rods of variable stiffness, as well as for control the effectiveness of numerical algorithms.

It can be expected that they will be useful in the transition to studying the stability of a broader class of rod systems whose elements operate under longitudinal loading and can be applied in the future when solving more complex problems of control and optimization of the mechanical characteristics of various engineering structures.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The proposed publication does not pursue any material interests and is intended only to expand and deepen knowledge concerning some topical problems of mechanics, and their sharing among specialists in relevant scientific fields.

References

1. Timoshenko S. P. (1953). History of strength of materials, McGraw-Hill.
2. Kurrer Karl-Eugen (2018). The History of the theory of structures, 2nd ed. Wiley Ernst & Sohn.
3. Bazhenov V. F., Vorona Yu. V., Perel'muter A. V. (2016). Budivel'na mehanika i teoriya sporud. Narysy z istorii [Structural analysis and theory of structures. Historical essays]. K.: Karavela.
4. Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961). Theory of elastic stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
5. Bleich F. (1952). Buckling strength of metal structures, McGraw-Hill.
6. Ziegler H. (1968). Principles of Structural Stability, 1st ed. New York: Blaisdell Publishing Company.
7. Yoo Chai H., Lee Sung C. (2011). Stability of structures: principles and applications, Elsevier Inc. <http://doi:10.1016/B978-0-12-385122-2.10001-6>.
8. Bazant Z. P., Cedolin L. (2010). Stability of structures, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
9. Jerath S. (2021). Structural Stability Theory and Practice, Wiley.
10. Shaw D., Huang Y. H. (1990). Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension. Engng Fract Mech, 35(6), 1019–27. [http://doi:10.1016/0013-7944\(90\)90129-5](http://doi:10.1016/0013-7944(90)90129-5).
11. Brighenti R. (2005). Buckling of cracked thin-plates under tension or compression. Thin-Walled Structures, Volume 43, Issue 2, 209–224. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2004.07.006>.
12. Datta P. K., Biswas S. (2011). Research Advances on Tension Buckling Behaviour of Aerospace Structures: A Review. Int'l J. of Aeronautical & Space Sci. 12(1), 1–15. <http://doi:10.5139/IJASS.2011.12.1.1>.
13. Liu X. (2013). On some eigenvalue problems for elastic instabilities in tension, PhD thesis. University of Glasgow. <http://theses.gla.ac.uk/4154/>.
14. Bardanov Yu. M. (1988). Kurs soprotivleniya materialov v strukturno-logicheskikh schemach [Course of Strength of Materials in Structural Logical schemes], K.: Vyscha shkola.
15. Gajewski A., Palej R. (1974). Badanie stateczności i optymalizacja kształtu sprężyste utwierdzonego preta rozciąganego [Stability and shape optimization of an elastically clamped bar under tension (in Polish)]. Rozprawy Inżynierskie. Eng. Trans. 22, 265–279.
16. Zaccaria D., Bigoni D., Noselli G., Misseroni D. (2011). Structures buckling under tensile dead load, Proc. R. Soc. A 467, 1686–1700. <https://doi:10.1098/rspa.2010.0505>.

Література

1. Timoshenko S. P. (1953). History of strength of materials, McGraw-Hill.
2. Kurrer Karl-Eugen (2018). The History of the theory of structures, 2nd ed. Wiley Ernst & Sohn.
3. Баженов В.А., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В. (2016). Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії. К.: Каравела.
4. Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961). Theory of elastic stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
5. Bleich F. (1952). Buckling strength of metal structures, McGraw-Hill.
6. Ziegler H. (1968). Principles of Structural Stability, 1st ed. New York: Blaisdell Publishing Company.
7. Yoo Chai H., Lee Sung C. (2011). Stability of structures: principles and applications, Elsevier Inc., <http://doi:10.1016/B978-0-12-385122-2.10001-6>.
8. Bazant Z. P., Cedolin L. (2010). Stability of structures, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
9. Jerath S. (2021). Structural Stability Theory and Practice, Wiley.
10. Shaw D., Huang Y. H. (1990). Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension. Engng Fract Mech, 35(6), 1019–27. [http://doi:10.1016/0013-7944\(90\)90129-5](http://doi:10.1016/0013-7944(90)90129-5).
11. Brighenti R. (2005). Buckling of cracked thin-plates under tension or compression. Thin-Walled Structures, Volume 43, Issue 2, 209–224. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2004.07.006>.
12. Datta P. K., Biswas S. (2011). Research Advances on Tension Buckling Behaviour of Aerospace Structures: A Review. Int'l J. of Aeronautical & Space Sci. 12(1), 1–15. <http://doi:10.5139/IJASS.2011.12.1.1>.
13. Liu X. (2013). On some eigenvalue problems for elastic instabilities in tension, PhD thesis. University of Glasgow. <http://theses.gla.ac.uk/4154/>.
14. Барданов Ю. М. (1988). Курс сопротивления материалов в структурно-логических схемах, К.: Выща школа.
15. Gajewski A., Palej R. (1974). Badanie stateczności i optymalizacja kształtu sprężystości utwierdzonego preta rozciąganego. Rozprawy Inżynierskie. Eng. Trans. 22, 265–279.
16. Zaccaria D., Bigoni D., Noselli G., Misseroni D. (2011). Structures buckling under tensile dead load, Proc. R. Soc. A 467, 1686–1700. <https://doi:10.1098/rspa.2010.0505>.

Sergey Bekshaev

Senior Lecturer,

s.bekshayev@gmail.com,

[ORCID: 0000-0002-5752-5321](https://orcid.org/0000-0002-5752-5321)

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,

Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029,

Стаття надійшла до редакції 19.05.2026

Стаття прийнята до друку 19.07.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

For references:

S. Bekshaev. (2026). On the buckling of a rod under tensile force. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 50–60.

Для посилань:

Бекшаев С.Я. Щодо втрати стійкості розтягнутого стрижня. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 50–60.

[On the buckling of a rod under tensile force](#) © 2026 by [S. Bekshaev](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

UDC 539.3; 534.1

THE PROBLEM OF SHOCK WAVE DIFFRACTION BY A RIGID HEMISPHERICAL INCLUSION

O. Nazarenko¹, A. Stekhun², A. Vasiliev²

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,*

²*Odesa I. I. Mechnikov National University*

Abstract: Currently, a large number of various components, parts, and entire assemblies that make up modern technical equipment – and even entire structures – are forced to operate either in continuous (stationary) or non-stationary modes due to rapid changes in external forces and loads that vary over time. Thin-walled shell-type structures constitute a very broad class of mechanical equipment found in modern surface, underwater, and air transportation, in rocket technology, and in construction. Under intense loads of various origins during the operation of such structures and mechanisms – including those of an explosive nature – high stresses arise, which are highly undesirable from the standpoint of their strength and reliability. Among the general range of problems associated with the use of shell structures and designs, including thin-walled ones, a class of problems should be highlighted that involves studying the interaction of undeformed shells of various geometries with the surrounding elastic medium.

This paper presents an approach to studying steady-state (transient) wave diffraction problems at a spherical defect, based on the application of the method of discontinuous solutions, which is founded on the method of generalized integral transforms [1,2]. A defect is defined as a portion of a surface such that, when crossed, wave functions, displacements, and stresses undergo first-kind discontinuities. Another type of defect is a thin rigid shell, the mid-surface of which coincides with the same portion of the surface. For this case, a discontinuous solution to the wave equation of linear elasticity theory in a spherical coordinate system has been derived. The problem of diffraction of a plane shock wave at an arbitrary angle of incidence α onto a rigid, thin-walled, stationary hemispherical object coupled to a bottom structure has been solved. The Heaviside unit function was chosen as the function describing such a wave. It is convenient to use in this case because the wave process formed in the elastic medium so that the wave process formed in the elastic medium acts step-wise (discretely) starting from the time moment t corresponding to the arrival of the wave-front moving at a prescribed speed C .

Keywords: wave equation, elasticity theory, discontinuous solution, jump, shock-wave diffraction, spherical coordinates, spherical defect.

ЗАДАЧА ДИФРАКЦІЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ НА ЖОРСТКОМУ НАПІВСФЕРИЧНОМУ ВКЛЮЧЕННІ

Назаренко О.А.¹, Стехун А.О.², Васильєв О.Б.²

¹*Одеська державна академія будівництва і архітектури,*

²*Одеський національний університет імені І.І. Мечникова*

Анотація: В даний час велика кількість різноманітних вузлів, деталей та цілих агрегатів, які входять у склад сучасних технічних обладнань та, навіть, цілих споруд вимушені працювати або у постійно діючих (стаціонарних), або у нестаціонарних режимах внаслідок швидких змін зовнішніх сил та навантажень, що впливають у часі. Тонкостінні конструкції оболонкового типу складають дуже широкий клас механічних обладнань, що зустрічаються у сучасному надводному, підводному та повітряному транспорті, у ракетній техніці, а також у будівництві. При інтенсивних навантаженнях різного походження в умовах експлуатації таких конструкцій та механізмів, в тому числі і вибухового типу, виникають великі напруження, які зовсім небажані з точки зору їх міцності та надійності. З загального кола проблем, що пов'язані з використанням оболонкових структур і конструкцій, в тому числі і тонкостінних, слід виділити



клас задач, що пов'язаний з вивченням взаємодії недеформованих оболонок різної геометрії з навколишнім пружним середовищем.

У запропонованій роботі розроблено підхід до дослідження стаціонарних (нестаціонарних) задач дифракції хвиль на сферичному дефекті, заснований на застосуванні методу розривних рішень, який базується на методі узагальнених інтегральних перетворень [1,2]. Під дефектом слід розуміти таку частину поверхні, при перетинанні якої, зазнають розривів першого роду хвильові функції, зміщення та напруження. Іншим випадком дефекту є тонка жорстка оболонка, серединна поверхня якої співпадає з тією ж частиною поверхні. Для цього випадку побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння лінійної теорії пружності в сферичній системі координат. Розв'язано задачу дифракції ударної плоскої хвилі при довільному куті фронту атаки α на жорсткий тонкостінний нерухомий напівсферичний об'єкт, зчеплений з донним утворенням. У якості функції, що описує таку хвилю, було обрано одиничну функцію Хевісайда. Її зручно використовувати в цьому випадку тому, щоб хвильовий процес, який формується в пружному середовищі, працював дискретно (східчасто) тільки в той момент часу t , коли буде надходити черговий фронт зі заздалегідь заданою швидкістю C .

Ключові слова: хвильове рівняння, теорія пружності, розривний розв'язок, стрибок, стаціонарна дифракція, сферичні координати, дефект.

1 INTRODUCTION

The importance and practical relevance of studying the interaction between undeformable shells of various geometries and the surrounding elastic medium are associated with the need to improve the resistance of structures, such as vessels, to underwater and airborne explosions, to develop and refine methods for underwater and atmospheric acoustics, and to ensure the seismic stability of certain aerospace and hydraulic engineering structures and their components. Thus, the development of diverse mathematical methods for solving problems related to the interaction of non-stationary (stationary) waves of arbitrary nature with various objects, including shell-type structures, remains a highly relevant topic today, which ultimately defined the scope of this paper.

2 LITERATURE REVIEW AND PROBLEM STATEMENT

Significant contributions to the development of theory and methods for solving the dynamic problems of bodies interacting with the surrounding medium have been made by scientists such as E. P. Babailov, V. A. Babeshko, A. I. Babichev, O. T. Buriev, M. D. Veksler, O. M. Guz, O. D. Goldenveizer, O. M. Kovshov, V. D. Kubenko, I. T. Seleznev, O. V. Tarlakovsky, G. Ya. Popov, and many others.

The methods developed to date for solving three-dimensional boundary-value problems in continuum mechanics can be broadly categorized into analytical and numerical approaches. Among the analytical methods, the following key approaches stand out: integral equation methods (potential theory); the method of separation of variables and its various modifications (the Fourier method and its generalizations in vector and scalar forms, as well as reduction to infinite systems of algebraic equations); the method of functions of a complex variable [3–7].

In addition, to solve complex boundary value problems involving the nonstationary scattering of elastic waves on a spherical inclusion, authors such as B. Sh. Usmonov and R. T. Mukhitdinov, representing the Tashkent Chemical-Technological Institute, employ specific hybrid (combined) analytical methods. These methodological approaches are primarily based on the application of Fourier integral transforms in the time domain. However, a significant mathematical difficulty arises because the eigenfunctions of the boundary value problem under consideration cannot be rigorously treated as ordinary vectors in a classical Hilbert space, since they fail to satisfy the required normalization conditions due to their exponential growth with increasing distance. Therefore, it becomes necessary to additionally employ generalized functions together with specialized mathematical methods developed within the framework of modern scattering theory.

Nevertheless, these methods are mainly applicable to canonical domains where boundary surface equations can be reduced to standard canonical forms. For spherical objects with non-standard geometry (such as a sphere with a circular aperture or a spherical segment in the presence of neighboring objects, e.g., a cone and an additionally segmented sphere), the principal part of the matrix operator for the plane acoustic wave diffraction problem is formulated. Problem regularization relies on an Abel-type integral transform, which allows reducing the system to an infinite set of Fredholm algebraic equations of the second kind with a compact operator in a Hilbert space [8–9].

Currently, various numerical approaches – such as finite-difference and finite-element methods – have gained widespread use in solving three-dimensional problems. The present work is devoted to solving a spatial problem in the theory of elasticity for a hemispherical segment bonded to a rigid base using the discontinuous solution method [1, 2].

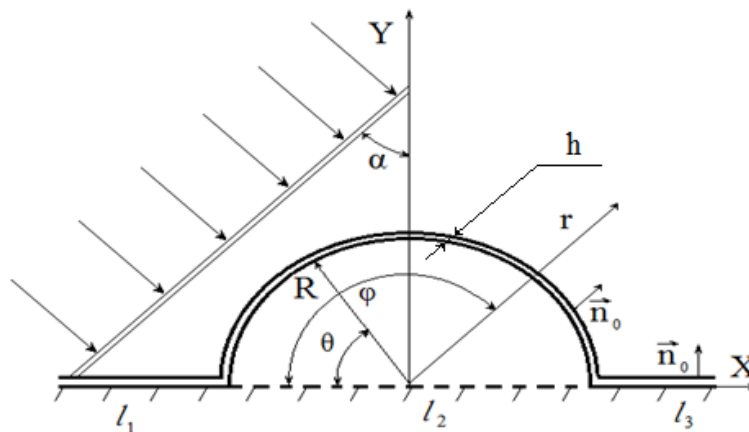
3 RESEARCH AIM AND OBJECTIVES

The objective of this study is to extend the discontinuous solution method [1, 2] to dynamic problems involving the diffraction of shock waves by spherical defects. To achieve this, the following tasks are addressed: construct a universal discontinuous solution to the wave equation and use it to reduce the problem of shock wave diffraction [3] on a thin, rigid hemispherical inclusion bonded to a rigid base to an integro-differential equation. Conduct an analytical convergence analysis and examine the asymptotic expressions for the resulting equation's solution. Compare the obtained solution with the findings of [11, 12, 13] regarding the reactive torsional moment of a spherical defect in an elastic medium induced by a torsional wave [5], expressed through displacements and stress components [3, 10, 11] dependent on wave functions [14, 15] which, according to the proposed approach, must satisfy the discontinuous solutions of the wave equations.

4 RESEARCH RESULTS

4.1 Problem Statement

Suppose that an infinite elastic medium contains a rigid hemispherical inclusion in the shape of a hemispherical segment of thickness h , which is rigidly bonded to a bottom surface (base). Furthermore, assume that this inhomogeneity is rigidly bonded to the surrounding space and remains "frozen" (stationary) within it. Let a plane shock wave impinge on the half-space, with the geometric parameters of the system being such that superimposition of the waves reflected and incident from the sphere and the bottom occurs. It is required to determine the wave superposition potential using the discontinuous solution method, which must satisfy the boundary conditions everywhere except at the points of the defect itself.



Thus, in dimensionless variables, the problem reduces to finding a solution of the wave equation in spherical coordinates [16]:

$$\square \Psi = \Delta \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

under the initial conditions:

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

and boundary conditions on the surface $l = l_1 + l_2 + l_3$:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right|_{\substack{r > R, \\ \varphi = -\pi, \pi}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{\substack{r = R, \\ \varphi = -\pi, \pi}} = 0,$$

where $\square$ denotes the d'Alembertian operator (Hamilton operator), Δ is the Laplace operator, and r, θ, φ are the radial and angular spherical coordinates, with $0 < \theta < \pi$.

It is also assumed that the wave front forms an angle α with the OY -axis, where R denotes the radius of the spherical inclusion.

Assuming that the total wave potential can be decomposed into three components [14]:

Ψ_{inc} – the incident-wave potential;

Ψ_{refl} – the reflected-wave potential;

Ψ_{diff} – the diffracted-wave potential,

the boundary conditions take the expanded form:

$$\left. \frac{\partial \Psi_{diff}}{\partial r} \right|_{\substack{r = R, \\ \varphi = -\pi, \pi}} = - \left(\left. \frac{\partial \Psi_{refl}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_{inc}}{\partial r} \right) \right|_{\substack{r = R, \\ \varphi = -\pi, \pi}}. \quad (2)$$

Furthermore, the case of a rigid shell yields the following relationship:

$$\left(\left. \frac{\partial \Psi_{inc}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_{refl}}{\partial \varphi} \right) \right|_{\substack{r > R, \\ \varphi = -\pi, \pi}} = 0. \quad (3)$$

4.2 Construction of a Discontinuous Solution in Spherical Coordinates

Expanding the wave equation (1) in spherical coordinates, we obtain (see [16]):

$$\square \Psi(r, \theta, \varphi, t) = \Delta \Psi(r, \theta, \varphi, t) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

where:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}. \quad (5)$$

In accordance with [1, 2], the jumps in the function and its normal derivative across the surface are denoted as follows:

$$\langle \Psi(R, \theta, \varphi, t) \rangle = \Psi(R-0, \theta, \varphi, t) - \Psi(R+0, \theta, \varphi, t), \quad (6)$$

$$\langle \Psi'(R, \theta, \varphi, t) \rangle = \Psi'(R-0, \theta, \varphi, t) - \Psi'(R+0, \theta, \varphi, t). \quad (7)$$

4.2.1 Elimination of the Variable t

We apply the Laplace transform [7] with respect to the time variable t (which plays the role of time in this context) to each of the expressions (4) – (7):

$$\Psi_p(r, \theta, \varphi) = \int_0^\infty \Psi(r, \theta, \varphi, t) \cdot \exp(-pt) dt. \quad (8)$$

Furthermore, to solve the problem in dimensionless variables, we additionally introduce a variable $\tau = at$ over which the integration is performed.

Thus, we obtain the following equation in terms of the Laplace transform:

$$\Delta \Psi_p(r, \theta, \varphi) - p^2 \Psi_p(r, \theta, \varphi) = 0,$$

where

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_p(r, \theta, \varphi) = & \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_p(r, \theta, \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi_p(r, \theta, \varphi) + \\ & + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi_p(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi_p(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi_p(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

In turn, the jumps in the transforms and their derivatives (6), (7) are written as follows:

$$\langle \Psi_p(R, \theta, \varphi) \rangle = \Psi_p(R-0, \theta, \varphi) - \Psi_p(R+0, \theta, \varphi), \quad (10)$$

$$\langle \Psi'_p(R, \theta, \varphi) \rangle = \Psi'_p(R-0, \theta, \varphi) - \Psi'_p(R+0, \theta, \varphi). \quad (11)$$

4.2.2 Elimination of the Angle φ

We employ the Fourier integral transform [7]:

$$\Psi_{pn}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_p(r, \theta, \varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi. \quad (12)$$

Applying this transform to all formulas (9) – (11), we yield the following expressions in terms of Fourier transforms:

$$\Delta \Psi_{pn}(r, \theta) - p^2 \Psi_{pn}(r, \theta) = 0,$$

where

$$\Delta \Psi_{pn}(r, \theta) = \frac{(r^2 \Psi'_{pn}(r, \theta))'}{r^2} + \frac{(\Psi'_{pn}(r, \theta) \sin \theta)'}{r^2 \sin \theta} - \frac{n^2}{r^2 \sin^2 \theta} \Psi_{pn}(r, \theta), \quad (13)$$

$$\langle \Psi_{pn}(R, \theta) \rangle = \Psi_{pn}(R-0, \theta) - \Psi_{pn}(R+0, \theta), \quad (14)$$

$$\langle \Psi'_{pn}(R, \theta) \rangle = \Psi'_{pn}(R-0, \theta) - \Psi'_{pn}(R+0, \theta). \quad (15)$$

In formula (11), (13) and below, we adopt the following notation: $(*)'$ – derivative with respect to the variable r and $(*)^{\bullet}$ – derivative with respect to the variable θ .

4.2.3 Elimination of the Angle θ

To eliminate θ , we use the Legendre integral transform [7]:

$$\Psi_{pnk}(r) = \int_0^\pi \sin \theta \cdot \Psi_{pn}(r, \theta) \cdot P_k^{[n]}(\cos \theta) d\theta, \quad (16)$$

where $P_k^{[n]}(\cos \theta)$ is the associated Legendre function, which arises when solving the Laplace equation in spherical coordinates.

Thus, applying the Legendre transform to equations (14), (15) yields equations depending solely on the radial variable r :

$$\Delta \Psi_{pnk}(r) - p^2 \Psi_{pnk}(r) = 0,$$

where

$$\Psi_{pnk}(r) = \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Psi_{pnk}(r) + \frac{d^2}{dr^2} \Psi_{pnk}(r) - \frac{k(k+1)}{r^2} \Psi_{pnk}(r). \quad (17)$$

In turn, the expressions for the jumps are written as:

$$\langle \Psi_{pnk}(R) \rangle = \Psi_{pnk}(R-0) - \Psi_{pnk}(R+0), \quad (18)$$

$$\langle \Psi'_{pnk}(R) \rangle = \Psi'_{pnk}(R-0) - \Psi'_{pnk}(R+0). \quad (19)$$

4.2.4 Application of the Hankel Transform with Respect to the Variable r

Combining equations (14), (15) into a single equation, as well as introducing a new function (for convenience of integration):

$$\Psi_{pnk}(r) = \frac{\Phi_{pnk}(r)}{\sqrt{r}}, \quad (20)$$

we obtain the following equation with respect to the function $\Phi_{pnk}(r)$:

$$\frac{1}{r} (r \Phi'_{pnk}(r))' - \frac{\Phi_{pnk}(r)}{r^2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 - p^2 \Phi_{pnk}(r) = 0. \quad (21)$$

Let us apply the integral Hankel transform [7] to equation (21), which has the following form:

$$\Phi_{pnk\alpha} = \int_0^\infty r J_\nu(\alpha r) \Phi_{pnk}(r) dr, \quad (22)$$

where $J_\nu(\alpha r)$ is a cylindrical Bessel function of the first kind, α is the Hankel transform parameter, and $\nu = k + \frac{1}{2}$.

Integrating each term of (20) using formula (22), we obtain functions of the form $\Phi_{pnk\alpha}$ in terms of the Hankel transform; that is, we eliminate the variable r . At this stage of the solution, additional attention should be paid to the integrated (non-integral) terms with respect to the variable r on the interval from 0 to infinity. According to the discontinuous solution method [1,2], upon crossing the boundary points of the surface of a spherical defect of radius

R , (i.e., when $r \rightarrow R \pm 0$), the functions and their normal derivatives exhibit jump discontinuities (discontinuities of the first kind). Consequently, jumps

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{pnk}(R) \rangle &= \Phi_{pnk}(R-0) - \Phi_{pnk}(R+0), \\ \langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle &= \Phi'_{pnk}(R-0) - \Phi'_{pnk}(R+0),\end{aligned}$$

are formed, which need to be determined using the boundary conditions.

At this stage of the solution, the unknown function $\Phi_{pnk\alpha}$ will be expressed through the jumps as follows:

$$\Phi_{pnk\alpha} = \frac{R \left[\langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle J_\nu(\alpha r) - \langle \Phi_{pnk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} J_\nu(\alpha r) \right]}{\alpha^2 + q^2}, \quad (23)$$

where $q = p$.

4.2.5 Application of the Inverse Hankel Transform

In order to restore r in the transform $\Phi_{pnk\alpha}$, one should use the inverse Hankel transform [7] with respect to the variable α :

$$\Phi_{pnk}(r) = \int_0^\infty \alpha J_\nu(\alpha r) \Phi_{pnk\alpha} d\alpha. \quad (24)$$

Applying (24) to both sides of equation (25), and taking into account that the jumps, $\langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle$ and $\langle \Phi_{pnk}(R) \rangle$, according to the introduced definitions, are certain numerical expressions, and additionally using the integral transform formula from [17]:

$$\int_0^\infty \frac{x J_\nu(ax) J_\nu(bx)}{x^2 + c^2} dx = \begin{cases} I_\nu(bc) K_\nu(ac), & 0 < b < a, \\ I_\nu(ac) K_\nu(bc), & 0 < a < b, \end{cases} \quad \text{Re}(c) > 0, \text{Re}(\nu) > -1,$$

we obtain the following equation instead of (23):

$$\Phi_{pnk}(r) = R \left[\langle \Phi'_{pnk}(R) \rangle \overline{\Psi}_k(r, R) - \langle \Phi_{pnk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \overline{\Psi}_k(r, R) \right], \quad (25)$$

where $I_\nu(bc)$, $K_\nu(ac)$ are the modified Bessel and Macdonald functions [19], respectively, $\nu = k + \frac{1}{2}$, $a = r$, $b = R$, $c = q$ and, in turn:

$$\overline{\Psi}_k(r, R) = \begin{cases} I_\nu(Rq) K_\nu(rq), & R < r; \\ I_\nu(rq) K_\nu(Rq), & r < R, \end{cases} \quad q = \omega \sqrt{\frac{\rho_m}{\mu}}, \quad (26)$$

q is the wavenumber, ω is the angular frequency, ρ_m is the material density, and μ is the Lamé constant.

To obtain the solution to the one-dimensional boundary value problem (17), it is necessary to again use relation (20), and then the discontinuous solution is finally written in the form:

$$\Psi_{pnk}(r) = R \left[\langle \Psi'_{pnk}(R) \rangle F_k(r, R) - \langle \Psi_{pnk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} F_k(r, R) \right], \quad (27)$$

where $F_k(r, R) = \frac{\overline{\Psi}_k(r, R)}{\sqrt{rR}}$.

Equation (27) contains two unknown jumps: $\Psi'_{pnk}(R)$ and $\Psi_{pnk}(R)$, the values of which must be determined. For this purpose, we first find $\frac{\partial}{\partial R} F_k(r, R)$. Further, taking the limit in (27) as the variable $r \rightarrow R+0$ (the case of a rigid inclusion), and also taking into account that, according to (18), (19):

$$\langle \Psi'_{pnk}(R) \rangle = -\Psi'_{pnk}(R+0), \quad \langle \Psi_{pnk}(R) \rangle = -\Psi_{pnk}(R+0) \quad (28)$$

respectively, and additionally introducing the notation $\Psi'_{pnk}(R+0) = f_{pnk}$, we obtain an equation for determining the unknown jump:

$$\Psi_{pnk}(R+0) = f_{pnk} \frac{2\nu K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)}{(2\nu+1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)}. \quad (29)$$

In turn, the function

$$f_{pnk} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f_p(r, \theta, \varphi) \sin \theta P_k^{[n]}(\cos \theta) \exp(-in\varphi) d\varphi d\theta$$

is known, and its explicit form depends exclusively on the type of the chosen incident wave.

Using the expression for $F_k(r, R)$ from (27), formulas (26) and (29), the assumptions for the jumps (28), as well as transformations for the functions $I_\nu(Rq)K_\nu(rq)$ [19], we obtain the expression for the solution to equation (27) in the form:

$$\Psi_{pnk}(r) = \frac{2R^2 K_\nu(rq) f_{pnk}}{\sqrt{rR} [(2\nu-1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq)]}. \quad (30)$$

4.2.6 Application of the Inverse Legendre Transform

To restore the angle θ in the transform $\Psi_{pnk}(r)$, one should use the inverse Legendre transform [7], which is written in the form:

$$\Psi_{pn}(r, \theta) = \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{kn} \Psi_{pnk}(r) P_k^{[n]}(\cos \theta), \quad (31)$$

where $\sigma_{kn} = \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!} \left(k + \frac{1}{2} \right)$.

Applying series (31) to (30) and formally replacing the angle θ with ϑ in the forward Legendre transform (16), we obtain the following equation:

$$\Psi_{pn}(r, \theta) = 2R \sqrt{\frac{R}{r}} \int_0^{\pi} f_{pn}(\vartheta) \sin \vartheta \Omega_n(R+0, \theta, \vartheta) d\vartheta, \quad (32)$$

$$\text{where } \Omega_n(R+0, \theta, \vartheta) = \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{kn} P_k^{(|n|)}(\cos \theta) P_k^{(|n|)}(\cos \vartheta) \frac{K_\nu(rq)}{\left[(2\nu-1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq) \right]}.$$

4.2.7 Application of the Inverse Fourier Transform

To restore the angle φ in the transform $\Psi_{pn}(r, \theta)$, one should use the inverse Fourier transform [7], which is written as:

$$\Psi_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{pn}(r, \theta) \cdot \exp(in\varphi). \quad (33)$$

Applying series (33) to equation (32), we formally replace the angle φ with ψ in the forward Fourier transform (12). Furthermore, by even extension of the functions on the right-hand side of (32), only the cosine term remains from the exponential, yielding the following equation:

$$\Psi_p(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \int_0^\pi \int_0^\pi f_p(\psi, \vartheta) \sin(\vartheta) \Omega(R+0, \theta, \vartheta, \varphi, \psi) d\psi d\vartheta, \quad (34)$$

where

$$\Omega(R+0, \theta, \vartheta, \varphi, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{kn} P_k^{(|n|)}(\cos \theta) P_k^{(|n|)}(\cos \vartheta) \cos(n\psi) \cos(n\varphi) \Lambda_\nu(r, R, q)$$

and

$$\Lambda_\nu(r, R, q) = \frac{K_\nu(rq)}{\left[(2\nu-1)K_\nu(Rq) - 2RqK_{\nu+1}(Rq) \right]}. \quad (35)$$

To proceed with solving the problem at hand, it is necessary at this stage to clarify the behavior of the sums and integrals involved in formulas (34) and (35).

4.3 Proof of Solution Convergence

The evaluation of definite integrals involving combinations of associated Legendre functions as terms of nested double series depends primarily on the indices k and $|n|$. Based on the orthogonality relations [19], the result of the integral evaluation branches into two cases. If the expression $(k+|n|)$ is an odd number, the terms of the series vanish (equal zero). If this expression is an even number, the result can be written in explicit analytical form [19] as a ratio of Gamma functions. Numerical test evaluations showed that as the lower index k (which always starts from $|n|$) increases, the terms of the series decay faster, thus ensuring the convergence of the series.

In addition, the behavior of the kernel $\Lambda_\nu(r, R, q)$ from formula (35) – represented by a combination of Macdonald functions (modified Bessel functions of the second kind) – at infinity and at zero for fixed and arbitrary values of the index k is of particular interest.

Thus, as the index k as the index tends to infinity while the argument of the function remains fixed [19], we have:

$$\frac{K_\nu(z)}{\left[(2\nu-1)K_\nu(z)-2zK_{\nu+1}(z)\right]} \sim \quad (36)$$

$$\sim \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}}{\left[(\nu-1/2)\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}-2z\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu-1}\right]} = -\frac{1}{2k+1}, \text{ when } k \rightarrow \infty,$$

where $\Gamma(\nu)$ is the Gamma function, and $\nu = k + \frac{1}{2}$.

Let us consider the asymptotic expansion for large values of z and a fixed index k , having previously denoted $\mu = 4\nu^2$

$$\frac{K_\nu(z)}{\left[(2\nu-1)K_\nu(z)-2zK_{\nu+1}(z)\right]} \sim \quad (37)$$

$$\sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \exp(-z) \left\{1 + \frac{\mu-1}{8z} + \dots\right\}}{\left((2\nu-1)-2z\right) \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \exp(-z) \left\{1 + \frac{\mu-1}{8z} + \dots\right\}} = -\frac{1}{2(k-z)}, \text{ when } z \rightarrow \infty$$

Consequently, both series (36) – (37) converge under the respective conditions, which guarantees the convergence of the kernel containing the combinations of Macdonald functions (33).

4.4 Construction of the Incident Wave Potential

It is known that the solutions to the three-dimensional wave equation in a Cartesian coordinate system:

$$\nabla^2 \Upsilon = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} \quad (38)$$

is given by [3] traveling plane waves $\Upsilon = \Upsilon(ct \pm nr)$, where

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

Υ is a smooth function representing a particular solution to equation (38), c is the speed, t is time, $\vec{n}$ is a unit vector in the direction of wave propagation, and $nr = n_x x + n_y y + n_z z$, where n_x, n_y, n_z are the direction cosines of the angles between the direction of wave propagation and the corresponding coordinate axes. It should be noted that in acoustics, it is convenient to associate the function Υ with the Heaviside step function. If an instantaneous point perturbation (e.g., an impact) occurs in the medium at the initial time ($t=0$) the initial condition is conveniently defined via the Heaviside step function, which "switches on" step-wise upon the arrival of the wave front moving at speed c . Furthermore, the function Υ can be regarded as the pressure exerted by the plane wave on an obstacle, and its relation to the potential $\Psi(r, \theta, \varphi, t)$ can be expressed as follows:

$$\Upsilon = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (39)$$

where ρ is the material density.

Transforming from Cartesian to spherical coordinates in the expression for the function Υ , applying the forward Laplace transform (8) to the result, and using boundary condition (2), we obtain the following:

$$\left. \frac{\partial \Psi_{diff}}{\partial r} \right|_{\substack{r=R_+ \\ \varphi=-\pi, \pi}} = \Psi'_p(R+0, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{p} (\exp_p^+ - \exp_p^-) = f_p \Big|_{r=R}, \quad (40)$$

where

$$\begin{aligned} \exp_p^+ &= \cos(\varphi + \alpha) \cdot \exp \left[-p(R - R \sin \theta \cos(\varphi + \alpha)) \right], \\ \exp_p^- &= \cos(\varphi - \alpha) \cdot \exp \left[-p(R - R \sin \theta \cos(\varphi - \alpha)) \right], \end{aligned}$$

and α is the frontal inclination angle of the shock wave.

Substituting f_p from (40) into equation (34), after formally replacing the angles θ with ϑ , and φ with ψ , we obtain the final expression for the solution to the formulated problem.

It should be noted that boundary condition (3) for the function f_p is satisfied automatically.

4.4.1 Justification for Choosing the Heaviside Step Function Model for a Shock Wave

The Heaviside step function is convenient for describing a plane shock wave because it represents an almost ideal (albeit simplified) jump, characterized by the following: ahead of the wavefront, the parameters of the medium are equal to zero or to a baseline background state present in the medium, while behind the wavefront, they change instantaneously and remain constant. The value of the Heaviside function is zero ahead of the front and unity behind it, which precisely mimics the sharp (discontinuous) rise in pressure or density in an ideal shock wave.

Furthermore, such a mathematical step function facilitates the formulation and satisfaction of boundary and initial conditions for the equations of continuum mechanics, which is a highly advantageous factor; its derivative, in turn, yields the Dirac delta function, enabling the description of instantaneous force impulses that generate the wave itself.

As for the wavefront itself, it should be understood as a surface separating the disturbed region of the medium from the undisturbed one, across which pressure, density, and velocity undergo an abrupt change. The shock wave itself should be perceived as a powerful compression front within which the medium parameters increase jump-wise.

Notably, Heaviside originally applied his function exclusively to transient processes in electrical circuits; however, in gas dynamics and shock wave theory, this mathematical abstraction was adopted later by theoretical physics schools worldwide (particularly in works on the Riemann problem / decay of an arbitrary discontinuity and internal wavefronts).

4.4.2 Main Fields of Application of the Heaviside Function

Problems involving the diffraction of a step-like shock wave (described by the Heaviside function) on a sphere are applied in aerodynamics, geophysics, and protective technologies for calculating dynamic loads, evaluating structural integrity, and modeling blast waves.

For instance, in the aerospace and defense sectors, this includes calculating peak loads and pressure distribution on the nose cones of missiles, spacecraft, and military equipment upon interaction with supersonic blast waves.

In industry, it is used for safety assessments of impact loading caused by explosions on cylindrical or spherical tanks, gas holders, and containment structures of nuclear power plants.

In geophysics and acoustics, it involves modeling the propagation and scattering of seismic or hydroacoustic pulses by spherical inhomogeneities in the Earth's crust and the ocean floor.

In materials science, it serves to study transient stress states in spherical structural elements (such as bearings or capsules) under impulsive mechanical loading.

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

Based on the results presented in Section 4, the following conclusions regarding the conducted study can be drawn:

1. The main objective of this work has been achieved, namely, demonstrating the applicability of transferring the discontinuous solution method from the theory of elasticity [11] to the classical problem of plane shock wave diffraction in an elastic space, as well as establishing the complete theoretical foundation for future numerical investigations.

2. A discontinuous solution to the wave equation in spherical coordinates (34) satisfying all boundary conditions has been constructed.

3. The problem of shock wave diffraction (38) in an elastic space by a hemispherical object bonded to the seabed (or bottom) has been formulated and solved.

4. The convergence of the obtained solution was verified to enable the calculation of the diffracted field both within the defect itself and at a distance, which will be the subject of further (numerical and graphical) analysis to be presented in a future paper.

5. The obtained result can be assessed as a novel approach to investigating the steady-state shock wave diffraction problem on spherical defects, based on the application of the discontinuous solution method and the generalized integral transform.

6. By additionally applying the inverse Laplace transform to (34), restoring the time variable t , and accounting for the initial conditions with respect to this variable, one can proceed to a broader class of problems, namely transient (non-stationary) problems in the theory of elasticity.

7. By varying the parameters in formula (26) for the wavenumber q , as well as the values of the spherical coordinates (r, θ, φ) , one can calculate the value of the potential $\Psi_p(r, \theta, \varphi)$ at any point in space for a wide range of materials, reproducing the complete diffraction pattern arising in the elastic space.

8. The constructed discontinuous solutions of the wave and three-dimensional equations of linear elasticity theory, applied to the problem of torsional wave diffraction by rigid stationary (movable) shell-type spherical bodies [11], completely coincide (up to constant factors) with the solution (34) obtained in the present problem. Moreover, relying on the results of [11], a torsional wave can be used as an alternative to the shock wave under consideration, provided all boundary conditions of the above problem are satisfied.

6 CONCLUSIONS

In accordance with the set objectives (Section 3) and the obtained results (Section 5), a universal solution to the wave equation in spherical coordinates was derived using the discontinuous solution method. This solution allows application to a wide spectrum of

acoustic problems, covering both steady-state and transient problems in elasticity theory with spherical inclusions of various physical natures.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The authors have no relevant financial or non-financial interests to disclose.

References

1. Popov, H.Ya. (1991). Pro ody novyi pidkhd do zadach pro kontsentratsiiu pruzhnykh napruh bilia trishchyn [On a new approach to problems of stress concentration near cracks]. PMM. 55 (1). 148–156.
2. Popov, G.Ya. (1992). Problem of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. Advances in Mechanics. 15 (1–2). 71–110.
3. Amenazade, Yu.A. (1971). Teoriia pruzhnosti [Theory of elasticity]. 2nd ed., revised and expanded. Kyiv/Kharkiv: Vyshcha shkola. 287 p. [in Ukraine].
4. Babych, S.Yu. (1976). Pro poshyrennia poverkhnevyykh khvyl u poperedno napruzhenii sferi [Propagation of surface waves in a prestressed sphere]. Dopovidi Akademii Nauk Ukrainskoi RSR. Series A. (8). 709–712. [in Ukraine].
5. Hrylytskyi, D.V., Piddubniak, O.P. (1980). Rozsiuvannia nestatsionarnoi khvyli krutinnia na zhorstkii nerukhomii sferi v pruzhnomu seredovyschi [Scattering of a transient torsional wave by a rigid stationary sphere in an elastic medium]. MTT. (5). 86–92.
6. Pidstryhach, Ya.S., Piddubniak, O.P. (1986). Rozsiuvannia zvukovykh puchkiv na pruzhnykh tilakh sferychnoi ta tsylindrychnoi formy [Scattering of acoustic beams by elastic bodies of spherical and cylindrical shapes]. Kyiv: Naukova dumka. 264 p.
7. Ufliand, Ya.S. (1963). Integralni peretvorennia v zadachakh teorii pruzhnosti [Integral transforms in problems of the theory of elasticity]. Kyiv: Akademiia nauk URSR. 361 p. [in Ukraine]. <https://zbmath.org/0126.19901>
8. Rezunenko, V.A. (2009). Dyfraktsiia ploskoi akustychnoi khvili na sferi z kruhovym otvorem [Diffraction of a plane acoustic wave by a sphere with a circular aperture]. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. (850). 71–77. <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-Khnu-850-2009-rez.pdf>
9. Rezunenko, V.A. (2012). Potentsialy sferychnoho sehmenta ta elektrostatychnoho zariadu v prysutnosti konusa ta sehmentovanoi sfery [Potentials of a spherical segment and an electrostatic charge in the presence of a cone and a segmented sphere]. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. (1030). 25–37. <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-1030-2012-rezun.pdf>
10. Slepian, L.I. (2002). Mechanics of cracks. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer. 468 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48010-5>.
11. Nazarenko, O.A., Stekhun, A.O. (2016). Doslidzhennia povedinky zhorstkoho sferychnoho sehmenta v pruzhnomu seredovyschi pid dieiu khvyli krutinnia [Investigation of the behavior of a rigid spherical segment in an elastic medium under torsional-wave excitation]. Visnyk ODABA. (65). 49–55. [in Ukraine]. <https://drive.google.com/file/d/13SPrxCZlXKQEk19HYm3q6xiffpr9AkgeK/view>
12. Nazarenko, O.A., Stekhun, A.O. and Yarovyi, A.T. (2023). The diffraction of elastic waves by spherical defects. Naukovyi Visnyk Uzhhorodskoho Universitetu. Serii "Matematyka i Informatyka", Vol. 42 No. 1, pp. 64–72. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.42(1).64-72. <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001>
13. Nazarenko, O., Stekhun, A., Yarovyi, A. (2024). The diffraction of elastic waves by spherical defects. Surveys in Mathematics and its Applications. 19. 217–232. <https://www.utgiiu.ro/math/sma>. Volume 19 (2024)
14. Huz, O.M., Kubenko, V.D., Cherevko, M.O. (1978). Dyfraktsiia pruzhnykh khvyl [Diffraction of elastic waves]. Kyiv: Naukova dumka. 307 p. [in Ukraine]. <http://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/63142>

15. Huz, O.M., Nemish, Yu.N. (1982). Metody zburen u prostorovykh zadachakh teorii pruzhnosti [Perturbation methods in spatial problems of the theory of elasticity]. Kyiv: Vyscha shkola. 352 p.
16. Tricomi, F.G. (1957). Integral Equations. New York: Interscience Publishers, Inc.; London: Interscience Publishers Ltd. 299 p
17. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (2014). Table of Integrals, Series, and Products. 8th ed. Amsterdam: Academic Press. 1164 p. https://faculty.tru.ca/ynec/tmp/Gradshteyn_Ryzhik.pdf
18. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I. (2018). Integrals and Series. Routledge. 640 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203750643>.
19. Jahnke, E., Emde, F., Lösch, F. (1960). Tables of Higher Functions. 6th revised ed. Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft; New York: McGraw-Hill Book Company. 318 p. <https://www.scribd.com/document/519102278/Tables-of-functions-Jahnke-Emde>

Література

1. Попов Г.Я. Про один новий підхід до задач про концентрацію пружних напруг біля тріщин// ПММ., 1991, Т.55., Вип. 1., С. 148-156.
2. Popov G.Ya. Problem of Stress concentration in the neighbourhood of spherical defect// Adv.in Mech., 1992, V. 15, № 1-2, P. 71-110.
3. Амензаде Ю. А. Теорія пружності: підручник / Ю. А. Амензаде. – 2-ге вид., перероб. та дод. – Київ/Харків: Вища шк., 1971. – 287 с.
4. Бабіч С. Ю., Про поширення поверхневих хвиль у попередньо напруженій сфері. Докл. АН Укр. РСР, Сер. А 8, 1976. – С. 709-712.
5. Грилицький Д.В. Розсіювання нестационарної хвилі крутіння на жорсткій нерухомій сфері в пружному середовищі/ Піддубняк О. П.// МТТ. – 1980, №5. – С. 86-92.
6. Підстригач Я. С. Розсіювання звукових пучків на пружних тілах сферичної та циліндричної форми/ Піддубняк О. П.— К.: Наукова думка, 1986.— 264с.
7. Уфлянд Я. С., Интегральные перетворення в задачах теории пружности. - Акад. наук УРСР, – 1963, - 361 с. <https://zbmath.org/0126.19901>.
8. В.А. Резуненко. Дифракція плоскої акустичної хвилі на сфері з круговим отвором/ Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка"., – 2009, – № 850. С.71–77. <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-Khnu-850-2009-rez.pdf>
9. В.А. Резуненко. Потенціали сферичного сегмента та електростатичного заряду в присутності конуса та сегментованої сфери/ Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", – 2012, – № 1030. С.25–37. <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-1030-2012-rezun.pdf>
10. Slepian L.I. Mechanics of cracks / L.I. Slepian. – 2nd ed. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. – 468 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48010-5>
11. Назаренко О.А. Дослідження поведінки жорсткого сферичного сегмента в пружному середовищі під дією хвилі крутіння/ Стехун А.О.//Вісник ОДАБА, – 2016, – Вип. 65, – С. 49-55. <https://drive.google.com/file/d/13SPrxCZlXKQEk19HYm3q6xffpr9AkgeK/view>
12. Nazarenko O. A., Stekhun A. O., Yarovyi A. T. The diffraction of elastic waves by spherical defects // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2023. — Том 42, № 1. — С. 64–72. <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001>
13. O. Nazarenko. The diffraction of elastic waves by spherical defects./A. Stekhun & A. Yarovyi//Surveys in Mathematics and its Applications, 2024, V. 19, – P. 217-232. [https://www.utgjiu.ro/math/sma. Volume 19 \(2024\)](https://www.utgjiu.ro/math/sma. Volume 19 (2024))
14. Гузь О.М. Дифракція пружних хвиль/ Кубенко В.Д., Черевко М.О. – К.: Наук. Думка, 1978, – 307 с. <http://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/63142>
15. Гузь О.М. Методи збурень у просторових задачах теорії пружності/ Ю.Н. Неміш. – К.: Вища школа, 1982. –352 с.
16. Tricomi F.G. Integral Equations. – Pub.: Interscience Publishers, Inc., New York, Interscience Publishers Ltd., London, 1957, 299 p.
17. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 8th ed. Amsterdam: Academic Press, 2014. – 1164 p. https://faculty.tru.ca/ynec/tmp/Gradshteyn_Ryzhik.pdf

18. Prudnikov A.P. Integrals and Series. / Brychkov U. A., & Marichev O.I., 2018, – 640 p., Routledge, DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203750643>.
19. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tables of Higher Functions / 6th revised edition. - Stuttgart: BG Teubner Verlagsgesellschaft; New York: McGraw-Hill Book Company, 1960. – 318 p. <https://www.scribd.com/document/519102278/Tables-of-functions-Jahnke-Emde>

Oleg Askoldovych Nazarenko

Ph.D., Associate Professor

gelo.fabric@gmail.com

[ORCID: 0000-0003-0405-6522](https://orcid.org/0000-0003-0405-6522)

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,
4 Didrikhsona St., Odesa, 65029, Ukraine

Angela Oleksiivna Stekhun

Ph.D., Associate Professor

angela.stekhun@gmail.com

[ORCID: 0000-0003-3140-2689](https://orcid.org/0000-0003-3140-2689)

Odesa I. I. Mechnikov National University,
2 Vsevolod Zmiienko St., Odesa, 65082, Ukraine

Oleksandr Borysovych Vasyliiev

Ph.D., Associate Professor

av5111955@gmail.com

[ORCID: 0000-0002-3826-4883](https://orcid.org/0000-0002-3826-4883)

Odesa I. I. Mechnikov National University,
2 Vsevolod Zmiienko St., Odesa, 65082, Ukraine

Стаття надійшла до редакції 28.05.2026

Стаття прийнята до друку 28.07.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

For references:

O. Nazarenko, A. Stekhun, A. Vasiliev (2026). The problem of shock wave diffraction by a rigid hemispherical inclusion. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 61–76.

Для посилань:

Назаренко О.А., Стехун А.О., Васильєв О.Б. Задача дифракції ударної хвилі на жорсткому напівсферичному включенні. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 2. С. 61–76.

[The problem of shock wave diffraction by a rigid hemispherical inclusion](#) © 2026 by [O. Nazarenko, A. Stekhun, A. Vasiliev](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ СТАБІЛІЗОВАНОГО ОБЕРТАННЯМ ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ

Лещенко Д.Д.¹, Козаченко Т.О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Проблема руху твердого тіла відносно нерухомої точки є однією з класичних задач механіки. Інтерес до задач динаміки твердого тіла посилюється в другій половині XX сторіччя в зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки. Дослідження руху супутників навколо центра мас важливо для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху і для розв'язування практичних задач космонавтики. В статті проведено комплексне теоретичне та чисельне дослідження актуальної задачі сучасної нелінійної механіки – еволюції руху відносно центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом за умов стабілізації власним обертанням. На основі застосування сучасного апарату асимптотичних методів нелінійної механіки, зокрема методу усереднення Боголюбова–Митропольського, вихідну систему диференціальних рівнянь руху зведено до стандартної автономної форми. В роботі проведена процедура усереднення та одержані усереднені рівняння, які простіше початкових, також здійснено аналіз алгебраїчної структури збурюючих моментів та обґрунтовано нехтування членами вищих порядків малості, що дозволило суттєво спростити математичну модель без втрати точності розв'язку на великих інтервалах часу. Проведено канонічні заміни змінних із переходом до повільно змінюваних амплітудно-фазових параметрів та квадратичних змінних, що дозволило ефективно розділити часові масштаби. Розв'язано задачу Коші для отриманої усередненої системи двох рівнянь першого порядку при заданих фізико-механічних параметрах конструкції. За допомогою чисельного інтегрування побудовано та детально проаналізовано траєкторії та графічні залежності амплітудної змінної та осової складової вектора кутової швидкості.

Досліджено еволюцію руху під дією малих моментів. Отримані результати є фундаментальним розвитком класичних задач динаміки твердого тіла з внутрішніми рухомими масами, в'язкопружними елементами або порожнинами, заповненими рідиною великої в'язкості. Практична цінність роботи полягає у можливості безпосереднього використання розроблених асимптотичних моделей для проектування й розрахунку вискоефективних систем орієнтації, стабілізації та управління космічними апаратами, а також для оцінки динамічного впливу внутрішніх рухомих елементів і членів екіпажу на стійкість обертальних режимів польоту.

Ключові слова: динаміка твердого тіла, рухома маса, метод усереднення, стабілізація обертанням.

PERTURBED MOTIONS OF SPINSTABILIZED RIGID BODY WITH A MOVING MASS

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The problem of a rigid body motion about a fixed point is one of the classical problems of mechanics. The interest in the problem of the rigid body dynamics has increased in the second half of the XX century in connection with the development of rocket and space technologies. The study of the motion of a satellite about center of mass is important for creating systems of orientation control, stabilization of motion and for solving the practical problems of astronautics. This paper presents a comprehensive theoretical and numerical study of an urgent problem in modern non-linear mechanics: the motion evolution about a center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a viscoelastic element under rotation stabilization conditions. Based on modern asymptotic



methods of non-linear mechanics, specifically the Bogoliubov–Mitropolsky averaging method, the initial system of differential equations of motion is reduced to a standard autonomous form. The averaging procedure was carried out to derive averaged equations that are simpler than the original ones. An analysis of the algebraic structure of perturbation torques was performed, justifying the omission of higher-order terms of smallness, which significantly simplified the mathematical model without sacrificing solution accuracy over long time intervals. Canonical variable transformations were applied to transition to slowly varying amplitude-phase parameters and quadratic variables, effectively separating the time scales. The Cauchy problem was solved for the resulting averaged system of two first-order equations under given physical and mechanical parameters of the structure. Through numerical integration, trajectories and graphical dependencies of the amplitude variable and the axial component of the angular velocity vector were constructed and thoroughly analyzed. The motion evolution under small torques was investigated. The obtained results represent a fundamental development of classical problems of rigid body dynamics with internal moving masses, viscoelastic elements, or cavities filled with a high-viscosity fluid. The practical value of this work lies in the direct applicability of the developed asymptotic models for designing and calculating highly efficient orientation, stabilization, and control systems for spacecraft, as well as for assessing the dynamic impact of internal moving elements and crew members on the stability of rotational flight regimes.

Keywords: rigid body dynamics, movable mass, spinstabilized rotation.

1 ВСТУП

Дослідження динаміки обертального руху твердого тіла відносно центра мас за наявності внутрішніх рухомих елементів та малих дисипативних збурень є однією з класичних і водночас актуальних задач нелінійної механіки. Зокрема, космічний апарат у своєму русі відносно центра мас зазнає впливу моментів сил різної фізичної природи. На нього діють гравітаційні, аеродинамічні, електромагнітні моменти, моменти сил світлового тиску, а також моменти, зумовлені рухом внутрішніх мас. Ці рухи обумовлені, наприклад, наявністю роторів, гіроскопів в тілі, а також переміщеннями екіпажу. Наявність зазначених внутрішніх і зовнішніх факторів суттєво ускладнює динамічну картину руху, перетворюючи її на багатовимірну нелінійну систему. У зв'язку з цим, розробка математичних моделей та аналіз еволюції обертальних режимів за наявності збурень і внутрішніх рухомих елементів є актуальною науково-прикладною задачею сучасної механіки, спрямованою на підвищення надійності систем орієнтації, стабілізації та управління польотом.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість наукових праць присвячена вивченню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами, вичерпний огляд яких представлено в роботах [1, 2]. Зокрема, у книзі [3] детально вивчено вплив внутрішньої пружності та дисипації на динаміку руху супутника відносно центра мас. У контексті космічних польотів відносні переміщення рухомих мас часто застосовуються як ефективний інструмент демпфування хаотичного обертання та згашення небажаних коливань апарата [4]. У цьому напрямі розглядалися фундаментальні проблеми стійкості, резонансних явищ, а також питання орієнтації та стабілізації рухів [4, 5]. Окремі аспекти руху твердого тіла з приєднаною точковою масою досліджено в праці [6].

У роботі [7] проаналізовано сумісний вплив порожнини з рідиною великої в'язкості та рухомої маси, з'єднаної з корпусом пружним зв'язком із в'язким тертям або квадратичною дисипацією, на еволюцію руху динамічно симетричного тіла.

Низка досліджень висвітлює проблеми динаміки космічних апаратів (КА), стабілізованих обертанням за допомогою реактивного двигуна [3, 8–10]. У цих моделях припускається, що напрямок векторної тяги збігається з головною віссю інерції КА, а двигун забезпечує керування його орбітальним рухом.

Питання руху близького до динамічно сферичного твердого тіла під дією малих збурюючих моментів висвітлено в працях [2, 11–14]. У роботах [13, 14] отримали подальший розвиток результати дослідження [11] стосовно поведінки твердого тіла під дією гіростатичного моменту.

У даній статті розглядається еволюція руху близького до динамічно сферичного твердого тіла відносно центра інерції за умов його стабілізації власним обертанням. До точки, розташованої на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані), прикріплено рухому точкову масу, з'єднану з корпусом в'язкопружним демпфером [2].

Практичний інтерес до окресленої проблематики зумовлений потребами ракетно-космічної галузі, зокрема необхідністю розробки систем орієнтації, стабілізації та управління космічними апаратами, а також урахуванням динамічного впливу внутрішніх елементів конструкції й екіпажу.

Наявність в'язкопружних елементів та рухомих мас суттєво ускладнює математичний опис системи, перетворюючи її на багатовимірну нелінійну систему диференціальних рівнянь. Складність прямого аналітичного інтегрування таких рівнянь вимагає застосування сучасних асимптотичних методів, визначення стаціонарних режимів руху на великих часових інтервалах.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю даної роботи є аналітичне розроблення асимптотичної математичної моделі еволюції обертального руху майже динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружно приєднаною точковою масою, стабілізованого обертанням, а також дослідження впливу дисипативно-частотних параметрів на усталені асимптотичні стани системи.

Для досягнення поставленої цілі сформовано комплекс взаємопов'язаних наукових завдань: здійснити аналітичні перетворення вихідних рівнянь та застосувати метод усереднення Боголюбова-Митропольського для переходу до стандартної форми відносно повільних змінних; увести квадратичні заміни для спрощення алгебраїчної структури усередненої системи та розділення часових масштабів руху; провести чисельне інтегрування (розв'язати задачу Коші) для двох дисипативно-частотних режимів системи; обґрунтувати інваріантність динаміки амплітудної змінної відносно змін параметрів та оцінити чутливість осової складової кутової швидкості.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо просторовий рух динамічно симетричного тіла відносно центра інерції. До точки на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані) прикріплена рухома точкова маса, яка з'єднана в'язкопружним демпфером з корпусом [2].

В цьому випадку наближена система рівнянь руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [2, 8, 9, 11]:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} qr (Q_1 p^2 + K_1 q^2 + L_1 r^2) + \\ &\quad + \lambda \Omega^{-4} p [q^2 (M_1 p^2 + N_1 q^2 + R_1 r^2) + r^2 (S_1 p^2 + T_1 r^2)] \} - \varepsilon^2 S p, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} pr (Q_2 q^2 + K_2 p^2 + L_2 r^2) + \\ &\quad + \lambda \Omega^{-4} q [r^2 (M_2 q^2 + N_2 r^2 + R_2 p^2) + p^2 (S_2 q^2 + T_2 p^2)] \} - \varepsilon^2 S q, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} r^3 (A + C - B)(B + C - A)A^{-1}B^{-1} \times \\ &\quad \times [(A - C)B^{-1}p^2 + (B - C)A^{-1}q^2]. \end{aligned} \quad (1)$$

Головні моменти інерції системи позначено як A , B та C , тоді як p, q, r є проекціями вектора абсолютної кутової швидкості ω на головні осі інерції, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малий параметр. Розглядається рух твердого тіла з точковою масою m , приєднаною до O_1 за допомогою пружної в'язі з жорсткістю c та коефіцієнтом в'язкого тертя δ , що має три ступені вільностей відносно тіла, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до місця її кріплення. Константи $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань та інтенсивність їх згасання відповідно.

У загальному випадку знайти розв'язок цієї задачі неможливо. Однак, якщо коефіцієнти Ω , λ такі, що вільний рух точки m затухає значно швидше, ніж час, необхідний для здійснення одного оберту твердого тіла, то відносні коливання точки m , викликані цим рухом, є малими. Можна припустити, що одиницю вимірювання часу обрано порядку періоду обертання тіла, так що кутова швидкість $\omega \sim 1$, і тоді маємо умови вигляду:

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg 1. \quad (2)$$

Умова (2) створює можливість застосування асимптотичного метода усереднення [15]. Крім того, виконання нерівності (2) дає підстави нехтувати вільними коливаннями точкової маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання. Натомість основна увага приділяється вимушеним квазістаціонарним рухам, які спричинені обертанням тіла.

Припустимо, що $\Omega^2 \sim \varepsilon^2$, $\lambda\Omega^4 \sim \varepsilon^3$.

Коефіцієнти $Q_1, K_1, L_1, N_1, R_1, S_1, T_1, Q_2, K_2, L_2, N_2, R_2, S_2, T_2$, які входять у праві частини перших двох рівнянь (1), є специфічними виразами, які складаються з A, B та C . Наприклад:

$$Q_1 = -1 - 5\frac{A-C}{B} - 6\frac{C-B}{A} - 3\frac{B-A}{C} + 7\frac{(A-C)(B-A)}{BC} + 4\frac{(B-A)(C-B)(A-C)}{ABC}. \quad (3)$$

Решту виразів із рівняння (1) у цій роботі не наведено через їхню складність.

Розглядається рух твердого тіла, стабілізованого обертанням за допомогою двигуна. В рівняннях (1) S додатна конструктивна стала, яка характеризує двигун [8, 9].

У дослідженні розглядається випадок майже динамічно сферичного твердого тіла, в якому головні моменти інерції незбуреної системи є приблизно рівними:

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0. \quad (4)$$

Після застосування серії перетворень до системи (1) із урахуванням співвідношень (2), (3) та переходу до повільного часу $\tau = \varepsilon t$ отримуємо збурену систему Ейлера (членами порядку ε^4 та вище нехтуємо):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_{1p}(p, q, r), & p(0) &= p_0, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{A'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) pr + \varepsilon f_{1q}(p, q, r), & q(0) &= q_0, \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{A' - B'}{J_0} pq + \varepsilon f_{1r}(p, q, r), & r(0) &= r_0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varepsilon f_{1(p,q,r)}(p, q, r)$ – функції, що містять доданки від першого до третього порядків малості за малим параметром ε .

Дослідження динаміки складних механічних та фізичних систем із малими збуреннями часто потребує застосування асимптотичних методів нелінійної механіки. Ефективним інструментом аналізу таких систем є метод усереднення Крилова, Боголюбова–Митропольського [15].

Розглядається динамічна система, поведінка якої описується за допомогою повільних змінних p, q, r . Для побудови динаміки руху спочатку розглядається незбурена система, яка відповідає випадку нульового малого параметра ($\varepsilon = 0$). Загальний породжувальний розв'язок системи застосовуємо як перетворення до змінних a, r :

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a \omega \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r, \quad (6)$$

де введено такі позначення для амплітуди

$$a = \sqrt{p_0^2 + \left(\frac{1}{w} \frac{dp_0}{d\tau} \right)^2},$$

фази $\varphi = w\tau + \varphi_0$, та частоти $w = r\sqrt{A'B'}/J_0$, $A'B' > 0$. Початкова фаза $\cos \varphi_0 = p_0/a$, $\sin \varphi_0 = -q_0\sqrt{B'/A'}/a$.

Диференціюванням перетворень (5) за часом τ із урахуванням (6) та подальшим застосуванням процедури усереднення за швидкою фазою φ , вихідна система зводиться до стандартної форми усереднених рівнянь:

$$\frac{da}{d\tau} = \beta\gamma a(\alpha a^4 + \eta a^2 r^2 - r^4) - a\mu r^2, \quad (7)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \beta A' a^2 r^3.$$

Безрозмірні коефіцієнти системи виражаються через параметри задачі за формулами:

$$\beta = \frac{-\rho^2 m \lambda}{J_0^2 \Omega^4}, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A'}{B'} \right), \quad \gamma = \frac{(A' - B')}{2}, \quad \chi = \frac{\xi P_0}{\nu J_0^3}, \quad \alpha = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{A'^2}{B'^2} \right), \quad \mu = \frac{\varepsilon S}{J_0}.$$

З метою подальшого спрощення аналізу фазового простору і чисельного інтегрування вводимо заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2$, та отримуємо трансформовану систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{d\tau} = 2\beta\gamma x(\alpha x^2 + \eta xy - y^2) - 2\mu x, \quad (8)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\beta A' xy^2.$$

Для вивчення динамічних властивостей отриманої системи (8) було проведено серію чисельних експериментів. Чисельне інтегрування здійснювалося при фіксованих початкових умовах та базових параметрах:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad \rho = 1; \quad m = 1; \quad \varepsilon = 0.1; \quad C = 1; \quad S = 0.15; \quad A' = 5.1; \quad B' = 5.$$

Було досліджено два типи режимів системи: 1) $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$ (рис. 1); 2) $\lambda = 9$, $\Omega = 9$ (рис. 2).

У першому випадку (рис. 1) на інтервалі часу $\tau \in [0; 300]$ спостерігається затухання квадрата амплітуди, яка монотонно прямує до нульового значення ($x \rightarrow 0$). Змінна $y(\tau)$ демонструє плавне зменшення від початкового значення $y(0) = 1$ і виходить на стаціонарне асимптотичне значення $y \approx 0.75$.

У другому випадку (рис. 2) зменшення параметрів λ та Ω призводить до інтенсифікації процесів. На інтервалі $\tau \in [0; 300]$ швидкість затухання $x(\tau)$ така ж як і в першому випадку, а змінна $y(\tau)$ стабілізується на нижчому асимптотичному рівні $y \approx 0.68$.

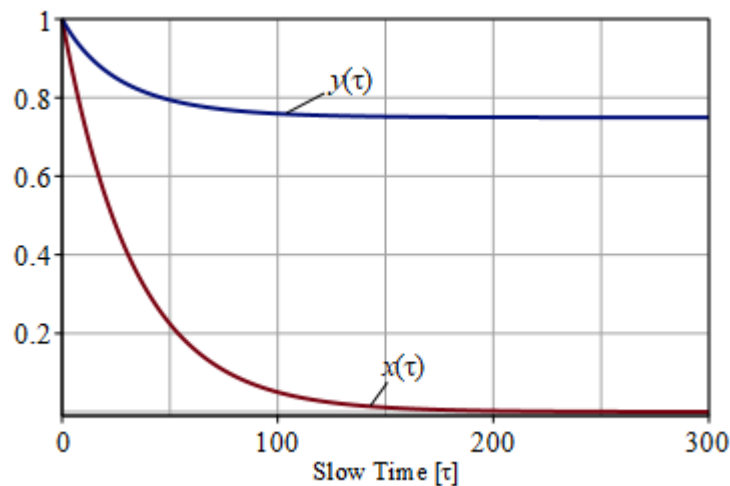


Рис. 1. Графіки змінних y та x у випадку $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$

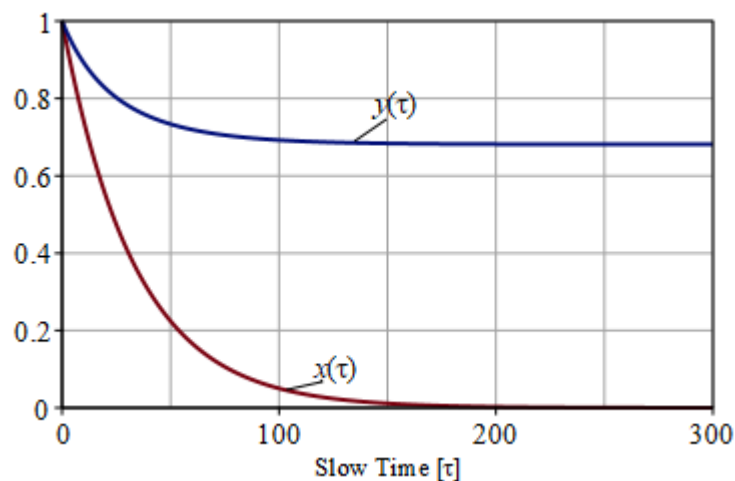


Рис. 2. Графіки змінних y та x у випадку $\lambda = 9$, $\Omega = 9$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Порівняльний аналіз чисельних розв'язків для двох наборів параметрів $\lambda = 9.8$, $\Omega = 10$ та $\lambda = 9$, $\Omega = 9$ показав, що графіки залежності $x(\tau)$ практично повністю співпадають. Це пояснюється тим, що параметр $\beta = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} J_0^{-2}$ в обох випадках набуває вкрай малих значень ($|\beta| \sim 10^{-3}$), через що нелінійний доданок $2\beta\gamma x(\alpha x^2 + \eta x y - y^2)$ у першому рівнянні системи (8) є малим порівняно з лінійним членом $-2\mu x$. Таким чином, динаміка амплітудного параметра $x(\tau)$ визначається майже виключно коефіцієнтом демпфування $\mu = \varepsilon S J_0^{-1}$ і носить універсальний експоненціальний характер $x(\tau) \approx e^{-2\mu\tau}$, інваріантний до змін параметрів λ та Ω .

На відміну від $x(\tau)$, динаміка другої змінної $y(\tau)$ (компоненти r^2) виявляє високу чутливість до зміни параметрів λ та Ω . У другому випадку за рахунок зменшення частотного параметра Ω з 10 до 9 модуль коефіцієнта зростає приблизно на 40% (з 0.00098 до 0.00137). Це призводить до зростання абсолютної швидкості зміни $y(\tau)$ на початковому етапі руху, роблячи спад у другому випадку більш стрімким.

6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження стабілізованого обертання за допомогою двигуна твердого тіла з рухомою масою, зв'язаною з тілом пружною в'яззю, одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після переходу до усередненої системи знайдено чисельний розв'язок задачі.

Встановлено розділення часових масштабів у системі: квадрат амплітудної складової затухає за швидким експоненціальним законом під дією лінійного демпфування, тоді як змінна квадрата екваторіальної складової плавно еволюціонує до скінченного асимптотичного значення. Частота коливань виступає ефективним параметром керування кінцевим стаціонарним станом осьової складової вектора кутової швидкості. Зменшення частотного параметра прискорює перехідні релаксаційні процеси в системі та зміщує її асимптотичний усталений рівень у бік менших значень.

Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, які можуть бути використаними при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас, а також при оцінці динамічного впливу переміщень членів екіпажу відносно корпусу апарата.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*, 2020. Volume 176. P. 464–475.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.019>
2. Leshchenko D., Kozachenko T. Perturbed motions of a gyrostat with a moving mass subjected to constant body-fixed torques. *Archive of Applied Mechanics*. 2026. Volume 96, article 111.
<https://doi.org/10.1007/s00419-026-03098-1>
3. Thomson W. T. *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower, 1986, 317p.
4. Jansseus F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015. Volume 38. Issue 4. P. 761–771.
5. Miller A.I., Gray G.L., Mazzoleni A.P. Non-linear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping and moving submasses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2001. Volume 24. Issue 3. 605–615.
6. Christov O. Non-integrability of a system from rigid body dynamics. *Annual of Sofia University St. Kliment Ohridski. Faculty of Mathematics and Informatics*. 2022. Volume 109. 57–69.
<https://doi.org/10.60063/gsu.fmi.109.57-69>
7. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*, 1992. Volume 28. Issue 8. P. 524–528.
8. Magnus K. Kreisel. *Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.

9. Pivovarov M. L., Ferreira L. O., Lopes R.V.F. Rigid body rotation evolution due to a disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechanica*. 1999. Volume 133. 239–246. <https://doi.org/10.1007/BF01179020>
10. Van der Ha J. C., Janssens F. L. Jet-Damping and Misalignment Effects During Solid-Rocket-Motor Burn. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2005. Volume 28. No 3. 412-420. <https://doi.org/10.2514/1.3852>
11. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. *Праці ІІММ НАН України*, 2024. Том 38. № 1. С. 44-53.
12. Leshchenko D., Rachinskaya A., Kozachenko T., Paly K. Evolution of Rotational Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass. In: Tonkonogiy, V. et al (eds). *Interpartner 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2026. 174-184. https://doi.org/10.1007/978-3-032-14926-8_15
13. Farag A.M., Amer T.S., Abady I.M. Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2022. Volume 10. 1637–1645. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>
14. He J.H., Amer T.S., Amer W.S., et al. Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2023. Volume 33. Issue 8. 2800–2814. <https://doi.org/10.1108/HFF-01-2023-0018>
15. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440 с.

References

1. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*. 176. 464–475. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.019>
2. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2026). Perturbed motions of a gyrostat with a moving mass subjected to constant body-fixed torques. *Archive of Applied Mechanics*. 96. 111. <https://doi.org/10.1007/s00419-026-03098-1>
3. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
4. Janssens, F. L. and Van der Ha, J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 38(4). 761-771. <https://doi.org/10.2514/1.G000123>
5. Miller, A.I., Gray, G.L., Mazzoleni, A.P. (2001). Non-linear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping and moving submasses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 24 (3), 605-615.
6. Christov, O. (2022). Non-integrability of a system from rigid body dynamics. *Annual of Sofia University St. Kliment Ohridski. Faculty of Mathematics and Informatics*. 109. 57-69. <https://doi.org/10.60063/gsu.fmi.109.57-69>
7. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28 (8). 524–528.
8. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
9. Pivovarov, M.L., Ferreira, L.O., Lopes, R.V.F. (1999). Rigid body rotation evolution due to a disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechanica*. 133. 239–246. <https://doi.org/10.1007/BF01179020>
10. Van der Ha, J. C., Janssens, F. L. (2005). Jet-Damping and Misalignment Effects During Solid-Rocket-Motor Burn. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 28 (3). 412-420. <https://doi.org/10.2514/1.3852>
11. Leshchenko, D.D., Rachinskaya, A.I. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 38 (1). 44-53. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-5> [in Ukraine]
12. Leshchenko, D., Rachinskaya, A., Kozachenko, T., Paly, K. (2026). Evolution of Rotational Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass. In: Tonkonogiy, V. et

- al (eds). Interpartner 2025. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 174-184. https://doi.org/10.1007/978-3-032-14926-8_15
13. Farag, A.M., Amer, T.S., Abady, I.M. (2022). Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 10. 1637–1645. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>
14. He, J.H., Amer, T.S., Amer, W.S., et al. (2023). Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 33(8). 2800–2814. <https://doi.org/10.1108/HFF-01-2023-0018>
15. Mitropolskiy, Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka.

Лешенко Дмитро Давидович

д.ф.-м.н., професор

leshchenko_d@ukr.net,

[ORCID: 0000-0003-2436-221X](https://orcid.org/0000-0003-2436-221X)

Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

Козаченко Тетяна Олександрівна

к.ф.-м.н., доцент

kushpil.t.a@gmail.com

[ORCID: 0000-0001-9034-3776](https://orcid.org/0000-0001-9034-3776)

Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

Стаття надійшла до редакції 24.06.2026

Стаття прийнята до друку 24.08.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Лешенко Д.Д., Козаченко Т.О. Збурені рухи стабілізованого обертанням твердого тіла з рухомою масою. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №2. С. 77–86.

For references:

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2026). Perturbed motions of spinstabilized rigid body with a moving mass. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 77–86.

Збурені рухи стабілізованого обертанням твердого тіла з рухомою масою © 2026 by [Лешенко Д.Д., Козаченко Т.О.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 517.944

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ТРИКУТНОЮ МАТРИЦЕЮ ПОТОКУ

Казмерчук А.І.¹

¹*Карпатський національний університет імені Василя Стефаника*

Анотація: У теорії рівнянь з частинними похідними особливе місце виділене для систем квазілінійних рівнянь першого порядку. З огляду на важливі застосування в гідромеханіці і газовій динаміці, такі системи отримали пристойну увагу і з врахуванням прикладних аспектів. Зауважимо, що у теорії систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку важливим є питання розв'язності і обґрунтування наближених методів розв'язання задачі Коші. Слід врахувати специфіку квазілінійних рівнянь першого порядку і, особливо, систем таких рівнянь, за якою в нелокальній задачі Коші навіть при гладких початкових функціях за скінченний час можуть виникати розриви. З огляду на це, доцільно розглядати ширші функціональні класи, ніж класи гладких функцій. Такі підходи на основі побудови узагальнених розв'язків у випадку конкретних систем квазілінійних рівнянь першого порядку дозволяють коректним чином будувати теорію розв'язності. Саме цьому і присвячене дослідження, яке висвітлюється в даній роботі.

У випадку діагональної матриці потоку наявні більш ширші дослідження, які включають і розв'язність і обґрунтування різноманітних наближених методів, таких як метод в'язкості, скінченно-різницеви методи за схемою Лакса, метод покрового згладжування тощо. У даній роботі для систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з трикутною матрицею потоку введено поняття узагальненого розв'язку задачі Коші. Введено умови, які забезпечують виконання принципу максимуму. Також запропоновано аналіз наближеного методу з допомогою параболічної системи диференціальних рівнянь другого порядку і доведено збіжність наближеного методу. Знайдено класи початкових функцій, з якими задача Коші має єдиний розв'язок. Показано, як отримати такий розв'язок з допомогою методу в'язкості. Отримані результати в певному сенсі узагальнюють і доповнюють результати для систем квазілінійних рівнянь першого порядку з діагональною матрицею потоку.

Розглянутий в роботі підхід також дозволяє зрозуміти, як працюють наближені методи, які є аналогом системи Нав'є-Стокса для системи рівнянь гідромеханіки.

Ключові слова: системи квазілінійних рівнянь, узагальнений розв'язок, класичний розв'язок, задача Коші, наближені методи.

SOLVABILITY OF A SYSTEM OF FIRST-ORDER QUASILINEAR EQUATIONS WITH A TRIANGULAR FLUX MATRIX

A. Kazmerchuk¹

¹*Vasyl Stefanyk Carpathian National University*

Abstract: In the theory of partial differential equations, a special place is reserved for systems of first-order quasilinear equations. Given their significant applications in fluid mechanics and gas dynamics, such systems have received considerable attention, including from the perspective of applied aspects. It should be noted that within the theory of systems of first-order quasilinear partial differential equations, the issues of solvability and the justification of approximate methods for solving the Cauchy problem are of particular importance. It is necessary to take into account the specific nature of first-order quasilinear equations and, in particular, systems of such equations whereby discontinuities can arise within a finite time in a nonlocal Cauchy problem, even given smooth initial functions. In light of this, it is appropriate to consider function classes broader than those of smooth functions. Approaches based on the construction of generalized solutions for specific systems of first-



order quasilinear equations make it possible to rigorously formulate a theory of solvability. The research presented in this paper is devoted precisely to this topic.

Extensive research exists regarding the case of a diagonal flux matrix, covering both solvability and the justification of various approximation methods-such as the viscosity method, finite-difference schemes (e.g., the Lax scheme), the step-by-step smoothing method, and others. In this paper, the concept of a generalized solution to the Cauchy problem is introduced for systems of first-order quasilinear partial differential equations with a triangular flux matrix. Conditions ensuring the validity of the maximum principle are also established. An analysis of an approximate method using a second-order parabolic system of differential equations is also presented, and the convergence of the method is proved. Classes of initial functions for which the Cauchy problem has a unique solution are identified, and it is shown how such a solution can be obtained using the viscosity method. In a certain sense, the results obtained generalize and complement those established for systems of first-order quasilinear equations with a diagonal flux matrix.

The approach considered in the paper also provides insight into the operation of approximate methods that serve as analogues to the Navier-Stokes system for systems of equations in fluid mechanics.

Keywords: systems of quasilinear equations, generalized solution, classical solution, Cauchy problem, approximate methods.

1 ВСТУП

При розв'язуванні диференціальних рівнянь класичний підхід вимагає існування і навіть неперервності похідних, які входять у рівняння. У деяких моделях природничих наук такі диференціальні рівняння є нульовим наближенням, і в такому випадку можлива наявність розривних розв'язків. Математична модель при цьому припускала утворення розривів навіть за умови гладкості початкових даних в задачі Коші. Відтак виникає потреба у новому трактуванні розв'язків диференціальних рівнянь.

Так виник підхід з введенням узагальнених розв'язків на основі виконання інтегральних тотожностей. З 50-х років минулого століття такий підхід науковці застосовували до квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Основною проблемою при цьому стала неєдиність введеного узагальненого розв'язку. Залишається невирішеною така проблема і для систем квазілінійних рівнянь першого порядку досить широкого класу, які здебільшого мають конкретні застосування в гідромеханіці та газовій динаміці. Дослідженню класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких вдається побудувати теорію розв'язності, якраз і присвячена ця робота.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

З 30-х років минулого століття від праць Шварца Л. і Соболева С.Л. бере початок сучасна теорія рівнянь з частинними похідними на основі підходу з використанням узагальнених функцій. У роботах дослідників [1-3] було сформовано підхід введення узагальненого розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку у випадку однієї просторової змінної, а далі і у випадку багатьох просторових змінних. У роботах [2-3] було побудовано теорію розв'язності задачі Коші для одного квазілінійного рівняння першого порядку. При цьому застосовувалися підходи з апроксимаціями на основі параболических рівнянь з використанням уже отриманих результатів, які знайшли відображення в працях [4,5].

Для систем квазілінійних рівнянь першого порядку з огляду на теорію розв'язності і обґрунтування наближених методів певні результати було отримано в працях [6-11]. Для систем квазілінійних рівнянь з діагональною матрицею потоку отримано результати існування і єдиності розв'язку, обґрунтовано наближені методи з широкого класу, в тому числі, методи в'язкості, покрокового згладжування, скінченно-різницеві методи. Такі результати отримано на основі єдиного підходу ([8-11]).

Залишається не вивченим питання відшукування класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких можна встановити існування та єдиність узагальненого розв'язку.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку отримати теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші у випадку конкретного вигляду матриці потоку, а саме, у випадку трикутної матриці потоку. Дослідити і віднайти обмеження для початкових функцій, та сформувати їхні функціональні класи, які забезпечують виконання принципу максимуму і розв'язність задачі Коші. Також доцільно отримати обґрунтування методу в'язкості, як наближеного методу розв'язування задачі Коші. Важливо також отримати оцінки збіжності з одночасною стійкістю за початковими функціями.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для системи квазілінійних рівнянь першого порядку розглянемо задачу Коші

$$u_t^j + \varphi^j(\hat{u}^j)_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^j) = 0, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$u^j|_{t=0} = u_0^j(x), j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де

$$u = u(t, x), u = (u^1, \dots, u^n), \hat{u}^j = (u^j, \dots, u^n), \varphi^j \in C^{2,\alpha}, \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \in C^{1,\alpha}, \\ u_0^1(x) \in L_\infty(R), u_0^j(x) \in C^1(R), j = 2, \dots, n.$$

Означення 1. Обмежена вимірна вектор-функція $u(t, x)$ така, що $u^j \in C^1(R)$, $j = 2, \dots, n$ називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо $\forall k \in R^1 \quad \forall f(t, x) \in C^{0,\infty}([0, T] \times R^1)$, $f(t, x) \geq 0$ при виконуються інтегральні умови

$$L(u, k, f) = - \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |u^1 - k| f_t + \text{sign}(u^1 - k) \left(\varphi^1(u) - \varphi^1(0, \hat{u}^2) - \varphi^1(k, \hat{u}^2) \right) f_x - \right. \\ \left. - \text{sign}(u^1 - k) \left(\varphi^1(0, \hat{u}^2)_x + \psi^1(t, x, u) \right) f \right\} dx dt \leq 0, \\ M_j(u, k, f) = - \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u^j f_t + \varphi^j(\hat{u}^j) f_x - \psi^j(t, x, \hat{u}^j) f \right\} dx dt = 0, j = 2, \dots, n, \text{ а умови (2)}$$

приймаються у сильному сенсі.

Надалі вважаємо, що

$$|u_0^j(x)| \leq M \text{ при } j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$0 \leq \frac{du_0^j(x)}{dx} \leq K \text{ при } j = 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} \right| \leq K_1, 0 \leq \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^s} \leq K_1, \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \geq 0 \text{ при } 2 \leq j \leq s \leq n. \quad (5)$$

Також нехай при $|v^j| \leq M_1(M)$, $j = 1, \dots, n$ справджується нерівність

$$\sum_{j=1}^n u^j \left(- \sum_{s=j}^n \frac{\partial \varphi^j(\hat{u}^j)}{\partial u^s} v^j - \psi^j(t, x, \hat{u}^j) \right) \leq C \sum_{j=1}^n (u^j)^2 \quad (6)$$

Разом із задачею (1),(2) розглянемо також і таку задачу Коші

$$u_t^j + \varphi^j(\hat{u}^j)_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^j) = 0, j = 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$u^j|_{t=0} = u_0^j(x), j = 2, \dots, n, \quad (8)$$

Тут використовуємо класичні міркування і методи розв'язування для квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Теорема 1. В області $[0, T] \times R^1$ існує єдиний розв'язок $\hat{u}^2 \in C^1$ задачі (7),(8).

Доведення. За виконання умов гладкості, накладених на початкові функції, існує єдиний локальний розв'язок $\hat{u}^2 \in C^1$ задачі (7),(8), який може бути побудований за методом характеристик. А за виконання умов (4), (5), (6), які забезпечують відсутність вздовж характеристик утворення розривів і виконання принципу максимуму, завдяки лемі Гронуолла цей локально визначений розв'язок може бути продовжений і на всю область $[0, T] \times R^1$.

Для забезпечення існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2) скористаємося методом в'язкості. Задля цього за виконання накладених вище умов розглянемо таку задачу Коші

$$u_t^{\varepsilon,1} + \varphi^1(\hat{u}^{\varepsilon,1})_x + \psi^1(t, x, \hat{u}^{\varepsilon,1}) = \varepsilon u_{xx}^1, \quad (9)$$

$$u_t^{\varepsilon,j} + \varphi^j(\hat{u}^{\varepsilon,j})_x + \psi^j(t, x, \hat{u}^{\varepsilon,j}) = 0, \quad j = 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$u^{\varepsilon,1}|_{t=0} = (u_0^1(x))^\varepsilon, \quad (11)$$

$$u^{\varepsilon,j}|_{t=0} = u_0^j(x), \quad j = 2, \dots, n, \quad (12)$$

де $(u_0^1(x))^\varepsilon$ - згладжена початкова функція $u_0^1(x)$ з допомогою усереднення.

Теорема 2. В області $[0, T] \times R^1$ існує єдиний класичний розв'язок задачі (9)-(12).

Доведення. Існування і єдиність розв'язку задачі (9)-(12) випливає з теореми 1, яка забезпечує існування компонент вектор-функції $j = 2, \dots, n$, і результатів і методів в [8-11]. Значимо при цьому, що умови (4)-(6) забезпечують виконання принципу максимуму для вектор-функції $u(t, x)$.

Задача (9)-(12) апроксимує задачу (1), (2), а отриманий розв'язок є наближеним для узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

При цьому якщо $\text{var}(u_0^1(x)) < +\infty$, то

$$L_1(u^{\varepsilon,1}, k, f) \leq \varepsilon \|\nabla f\|_C \text{var}_{\text{sup}f} u^{\varepsilon,1}(t, x), \quad (13)$$

тут $\|\cdot\|_C$ - норма у просторі неперервних функцій, $\text{var}(\cdot)$ - варіація у сенсі Тонеллі-Чезарі, $\text{sup}f$ - носій функції f . Це випливає з формули Остроградського при застосуванні оператора $L_1(u^\varepsilon, k, f)$ з врахуванням рівнянь системи (1).

Зауважимо також, що побудований наближений метод стійкий за початковими даними, і для вектор-функцій $u^\varepsilon(t, x)$ стійкими є модулі неперервності $\lambda(h)$ за змінною x в $L_{1,loc}(R)$ і $v_t(\tau)$ - за змінною t в $L_{1,loc}(R)$ ([7]).

Отримано оцінки збіжності наближених розв'язків до узагальненого розв'язку задачі (1), (2) у наступному сенсі.

Теорема 3. Нехай $\text{var}(u_0(x)) < +\infty$ і $\text{var}(v_0(x)) < +\infty$. Тоді для розв'язків задачі (9)-(12) $u^{\varepsilon_1}(t, x)$ і $v^{\varepsilon_2}(t, x)$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ і таких, що відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta, \quad (14)$$

де $\delta \in (0, 1)$ залежить від даних системи (9), (10).

Доведення ґрунтується на методах робіт [2, 7-10].

Доведення. Нехай $\chi(K_{r,T})^h$ - усереднення з параметром h характеристичної функції $\chi(K_{r,T})$ зрізаного конуса $K_{r,T} = \{(t, x) | (K_1 t + r)^2 \geq |x|^2, 0 < t < T\}$. З врахуванням оцінки (13) при $f(t, x) = \chi(K_{r,T})^h$ отримуємо

$$\int_0^{T+\infty} \int L(u^{\varepsilon_1}, u^{\varepsilon_2}, f) dy d\tau \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h} C(T) \varlimsup_{suppf} u^{\varepsilon,j}(t, x),$$
 а далі після оптимізації за параметром h отримуємо оцінку (14).

Теорема 4. Нехай $u_0^1(x) \in L_\infty(R)$, $v_0^1(x) \in L_\infty(R)$. Тоді для розв'язків системи (9)-(12) $u^{\varepsilon_1}(t, x)$ і $v^{\varepsilon_2}(t, x)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, і таких, що відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \mu((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)), \quad (15)$$

де функція $\mu(\sigma) \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ залежить від сумісного модуля неперервності $\lambda(\sigma)$ в $L_{1,loc}(R)$ початкових функцій $u_0(x)$ і $v_0(x)$ та від параметрів системи (9), (10).

Доведення. Застосуємо теорему 3 до задачі зі згладженими першими компонентами початкових функцій з допомогою оператора усереднення з параметром h . Далі

$$\begin{aligned} \|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} &\leq \|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \|u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + \\ &+ \|v^{\varepsilon_2}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \end{aligned}$$

А оскільки, враховуючи стійкість наближеного методу, і отримані оцінки (14)

$$\|u^{\varepsilon_1}(t, \cdot) - u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(x) - (u_0(x))^h\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \lambda(h),$$

$$\|v^{\varepsilon_2}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|v_0(x) - (v_0(x))^h\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \lambda(h),$$

$$\|u^{\varepsilon_1,h}(t, \cdot) - v^{\varepsilon_2,h}(t, \cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{C\lambda(h)}{h},$$

після оптимізації за параметром h отримаємо оцінку (15).

Теорема 5. В області $[0, T) \times R^1$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2)

Доведення. Результат випливає з теореми 3 при $v_0(x) = u_0(x)$ і граничному переході при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ в оцінках (13)-(15).

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані результати розв'язності задачі Коші для системи з трикутною матрицею потоку є продовженням дослідження класів систем квазілінійних рівнянь першого порядку, для яких встановлено аналогічні результати. У випадку діагональної матриці потоку наявні більш ширші дослідження, які включають і розв'язність і обґрунтування наближених методів. Така ж перспектива очікується і для введеного класу систем. З другого боку, очевидні конструкції контрприкладів переконують нас в доцільності виділення саме такого класу систем.

6 ВИСНОВКИ

У роботі для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку отримано теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші у випадку конкретного вигляду матриці потоку, а саме, у випадку трикутної матриці потоку. Початкові функції при цьому належать функціональним класам з обмеженнями. При

цьому отримано обґрунтування методу в'язкості, як наближеного методу розв'язування задачі Коші. Отримано оцінки, які дозволяють оцінювати неперервну залежність розв'язків від початкових даних задачі.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Lax, Peter D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves./ Philadelphia, Pa. : Society for Industrial & Applied Mathematics, 1973.
2. Kruzhkov, S. N. First order quasilinear equations in several independent variables./ Mathematics of the USSR-Sbornik 10, no. 2 (1970): 217–243.
3. Oleinik, O. A. On uniqueness and stability of a general solution of Cauchy's problem of quasilinear equations./ Uspekhi Matematicheskikh Nauk 14, no. 2 (1959): 165–170.
4. O.A. Ladyzenskaya, N.A. Solonnikov and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967
5. O.A. Ladyzenskaya and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.
6. Казмерчук А. І, Сеньків О. Я. Розв'язування задачі Коші для однієї системи квазілінійних рівнянь першого порядку засобами комп'ютерної технології // Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1996.- Вип.2. – с. 24-29
7. Liu, T.-P. (2000). Hyperbolic and viscous conservation laws. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719420>.
8. Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі //Вісник національного університету “Львівська політехніка”, Прикладна математика.-2000.-№411.-с.147-151
9. Казмерчук А. І. Оптимізація швидкості збіжності в методах наближеного розв'язування задачі Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число.-2018. -2(46), с.47-51 [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2\(46\)-47-51](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51).
10. Казмерчук А.І. Умовно-коректна задача Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число. – 2023. - 18(67), с.49-53, [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18\(68\)-49-53](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53)
11. Казмерчук А. І. Наближення параболічними системами диференціальних рівнянь з частинними похідними вищих порядків систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число. – 2026. - 22(83), с.61-66 [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22\(83\)-61-66](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22(83)-61-66)

References

1. Lax, P. D. (1973). *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
2. Kruzhkov, S. N. (1970). First order quasilinear equations in several independent variables. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(2), 217–243.
3. Oleinik, O. A. (1959). On uniqueness and stability of a general solution of Cauchy's problem of quasilinear equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14(2), 165–170.
4. Ladyzenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'tseva, N. N. (1967). Linear and quasilinear equations of parabolic type (Vol. 23). Providence, RI: American Mathematical Society.
5. Ladyzenskaya, O. A., & Ural'tseva, N. N. (1968). Linear and quasilinear elliptic equations. New York, NY: Academic Press.
6. Kazmerchuk, A. I., & Senkiv, O. Ya. (1996). Solving the Cauchy problem for a system of first-order quasilinear equations using computer technology [Rozv'yazuvannya zadachi Koshi dlya

- odniyeyi systemy kvaziliniynykh rivnyan' pershoho poryadku zasobamy komp'yuternoyi tekhnolohiyi]. Visnyk Prykarpatskoho Universytetu. Matematyka. Fizyka. Khimiia, (2), 24–29. (In Ukrainian).
7. Liu, T.-P. (2000). Hyperbolic and viscous conservation laws. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. . <https://doi:10.1137/1.9780898719420>.
 8. Kazmerchuk, A. I. (2000). On the substantiation of approximate methods for solving quasilinear conservation laws with non-smooth data of the problem [Pro obgruntuvannya nablyzhenykh metodiv rozv'yazuvannya kvaziliniynykh zakoniv zberezheniya z nehladkymy danyymi zadachi]. Bulletin of Lviv Polytechnic National University, Series of Applied Mathematics, (411), 147–151. (In Ukrainian).
 9. Kazmerchuk, A. I. (2018). Convergence speed optimization in methods of approximate solving of initial values problem for the system of quasilinear partial differential equations of the first order [Optymizatsiya shvydkosti zbizhnosti v metodakh nablyzhenoho rozv'yazuvannya zadachi pochatkovykh danykh dlya systemy kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' u chastynnykh pokhidnykh pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 2(46), 47–51. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2\(46\)-47-51](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51) (In Ukrainian).
 10. Kazmerchuk, A. (2023). Conditionally correct initial values problem for the system of quasilinear partial differential equations of the first order [Umovno korektna zadacha pochatkovykh danykh dlya systemy kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' u chastynnykh pokhidnykh pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 18(68), 49–53. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18\(68\)-49-53](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53) (In Ukrainian).
 11. Kazmerchuk, A. (2026). Approximation by parabolic systems of partial differential equations of higher order systems of quasilinear partial differential equations of the first order [Nablyzhennya parabolichnyimi systemami dyferentsialnykh rivnyan' vyshchykh poryadkiv sistem kvaziliniynykh dyferentsialnykh rivnyan' z chastynnymy pokhidnymy pershoho poryadku]. Precarpathian Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number, 22(83), 61–66. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22\(83\)-61-66](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2026-22(83)-61-66) (In Ukrainian).

Стаття надійшла до редакції 10.07.2026

Стаття прийнята до друку 10.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Казмерчук Анатолій Іванович

к. ф.-м. н., доцент

anatolii.kazmerchuk@cnu.edu.ua

[ORCID: 0009-0008-1668-1441](https://orcid.org/0009-0008-1668-1441)

Карпатський національний
університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, Україна,

Для посилань:

Казмерчук А.І. Розв'язність системи квазілінійних рівнянь першого порядку з трикутною матрицею потоку. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 2. С. 87-94.

For references:

Kazmerchuk. (2026). Solvability of a system of first-order quasilinear equations with a triangular flux matrix. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 87 –94.

[Розв'язність системи квазілінійних рівнянь першого порядку з трикутною матрицею потоку](#) © 2026 by Казмерчук А.І. is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 539.3

УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Фесенко Г.О.¹

¹Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Анотація: Досліджено усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикально розташованим циліндричним жорстким включенням, яке зчеплене з півпростором. На плоску грань півпростору діє гармонічне стискальне навантаження, зосереджене по колу, радіус якого перевищує радіус включення.

Методом інтегрального перетворення Вебера, застосованого безпосередньо до осесиметричних рівнянь руху та крайових умов, задачу зведено до неоднорідної векторної одновимірної задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Її розв'язано із застосуванням матричного диференціального числення. Побудовано спадаючий розв'язок відповідного однорідного матричного рівняння та фундаментальну матрицю-функцію.

Сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомої функції, що має механічний зміст дотичного напруження на циліндричній поверхні жорсткого включення, розв'язано методом колокацій. Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь першого роду розв'язано методом Гаусса. Інтеграли обчислені чисельно з урахуванням поведінки підінтегральних функцій поблизу особливих точок.

Застосування оберненого інтегрального перетворення Вебера завершує побудову просторового поля переміщень. Визначено нормальне напруження на циліндричній поверхні жорсткого включення під дією гармонічного навантаження та амплітуди коливань плоскої грані півпростору. Проведено аналіз отриманих результатів залежно від фізико-механічних характеристик матеріалу півпростору, відстані дії зовнішньої сили відносно включення та безрозмірної частоти коливань. Отримані результати можуть бути використані під час моделювання та аналізу напружено-деформованого стану конструкцій з циліндричними дефектами або жорсткими вставками. Запропонований підхід може бути поширений на розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на поверхні включення.

Ключові слова: інтегральне перетворення Вебера, векторна одновимірна крайова задача, матричне диференціальне числення, сингулярне інтегральне рівняння, усталені коливання.

STEADY-STATE OSCILLATIONS OF AN ELASTIC HALF-SPACE WITH A RIGID CYLINDRICAL INCLUSION

A. Fesenko¹

¹Odesa I.I. Mechnikov National University

Abstract: Steady-state oscillations of an elastic half-space containing a through-going vertically oriented rigid cylindrical inclusion bonded to the half-space are investigated. A harmonic compressive load concentrated along a circle whose radius exceeds that of the inclusion acts on the flat face of the half-space.

By applying the Weber integral transform directly to the axisymmetric equations of motion and boundary conditions, the problem is reduced to a non-homogeneous vector one-dimensional boundary value problem for the unknown displacement transforms, which is solved using matrix differential calculus. A decaying solution of the corresponding homogeneous matrix equation and a fundamental matrix function are constructed.

A singular integral equation for the unknown function, which has the mechanical meaning of the shear stress on the cylindrical surface of the rigid inclusion, is solved by the collocation method. The



resulting system of linear algebraic equations of the first kind is solved by Gaussian elimination. Numerical integration techniques are employed to evaluate the integrals, enabling proper treatment of the singular behavior of the integrands near the singular points.

Application of the inverse Weber integral transform completes the construction of the three-dimensional displacement field. The normal stress on the cylindrical surface of the rigid inclusion under harmonic loading and the vibration amplitude of the flat face of the half-space are determined. The results are analyzed as functions of the physical and mechanical properties of the half-space material, the distance of the external force from the inclusion, and the dimensionless frequency of oscillation. The results obtained may be used in the modeling and analysis of the stress-strain state of structures containing cylindrical defects or rigid inserts. The proposed approach can be extended to the solution of mixed dynamic problems of elasticity theory for other types of boundary conditions.

Keywords: Weber integral transform, vector one-dimensional boundary value problem, matrix differential calculus, singular integral equation, steady-state oscillations.

1 ВСТУП

Дослідження динамічних задач теорії пружності для півпростору з циліндричним включенням є важливим напрямом механіки деформівного твердого тіла. Такі задачі мають широке застосування в інженерній практиці. Циліндричні включення можуть зустрічатися у вигляді підземних трубопроводів, свердловин, армованих елементів у композитних матеріалах, а також геологічних неоднорідностей, таких як порожнини, заповнені іншим матеріалом. Вивчення динамічного впливу на такі включення дозволяє прогнозувати розвиток напружено-деформованого стану, оцінювати стійкість конструкцій і вдосконалювати методи їх розрахунку.

Наявність жорсткого циліндричного включення у пружному півпросторі суттєво змінює характер розподілу напружень та переміщень порівняно з однорідним середовищем. Особливо важливим є врахування динамічного характеру навантаження, оскільки за умов гармонічного збудження виникають резонансні явища, які можуть призводити до значної концентрації напружень на межі поділу включення та матриці. Така концентрація є потенційним джерелом зародження тріщин та руйнування конструкцій.

З математичної точки зору задачі про коливання пружних тіл з циліндричними неоднорідностями належать до класу мішаних крайових задач математичної фізики. Їх розв'язання пов'язане з необхідністю одночасного задоволення крайових умов на поверхні включення та на межі півпростору, що, як правило, призводить до сингулярних інтегральних рівнянь. Розробка ефективних аналітико-числових методів розв'язання таких рівнянь залишається актуальним завданням обчислювальної механіки.

Новизна та мета даної роботи з теоретичного погляду полягають у застосуванні та верифікації методу матричного диференціального числення Попова Г.Я. [1] для класичного об'єкта теорії пружності – пружного півпростору з наскрізним жорстким циліндричним включенням в динамічній постановці. З практичного погляду робота спрямована на аналіз коливальної поведінки плоскої грані півпростору та напруженого стану на поверхні включення під дією різних режимів навантаження.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Контактну задачу про взаємодію двох напружених півпросторів і пружного циліндричного штампу з початковими напруженнями без урахування сил тертя та у випадку неоднакових коренів характеристичного рівняння досліджено у [2] з використанням теорії потенціалу. Застосовано інтегральне перетворення Ганкеля, отримані інтегральні рівняння розв'язано методом ортогональних поліномів. У роботі [3] побудовано точний розв'язок задачі про втискування жорсткого циліндру у пружний півпростір із тертям із збереженням впливу зсувного напруження на нормальне переміщення в зоні контакту. Загальний розв'язок побудовано методом Папковича-Нейбера у плоских біполярних координатах, з подальшим зведенням задачі до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого нормального напруження в зонах ковзання. У роботі [4] запропоновано аналітико-числовий алгоритм розв'язання задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами. На границях порожнин задають радіальні переміщення і дотичні напруження, а на межі півпростору – або переміщення або напруження. Використовується узагальнений метод Фур'є із зведенням задачі до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У роботі [5] неоднорідний півпростір з циліндричною порожниною знаходиться в умовах антиплоскої деформації під впливом динамічного навантаження, проаналізовано коефіцієнт інтенсивності напруження навколо дефекту. У [6] розглянуто динамічний

відгук півпростору з довільним циліндричним включенням паралельними граничній поверхні півпростору.

Теорії гармонічних коливань присвячено монографію [7], де в тому числі розглянуто задачі про збудження хвиль у півпросторі, нескінченному шарі та циліндрах, надається широкий огляд літератури з теми. Детально розглянута методика обчислення інтегралів, якими виражаються переміщення, прийомами теорії функцій комплексного змінного. Аналізу усталених коливань плоского жорсткого включення у тривимірних пружних тілах присвячено роботу [8], де використовується метод інтегральних рівнянь з особливістю потенціалу Гельмгольца. Методом граничних елементів будується дискретний аналог рівнянь, які враховують зростання функцій - розв'язків на контурі інтегрування, області дефекту. У [9] розглянуто динамічну задачу для півпростору з циліндричною порожниною, розташованою паралельно границі півпростору. Рівняння руху зводяться до двох хвильових рівнянь у полярних координатах з використанням потенціалів Гельмгольца. Для побудови полів зміщень через потенціали використовується метод розкладу хвильової функції. Граничні умови на поверхні порожнини виконуються точно, а на вільній поверхні півпростору – наближено. Таким чином, невідомі коефіцієнти в розкладах отримані з обробки граничних умов за допомогою схеми найменших квадратів. Проаналізовано вплив частоти коливань і глибина порожнини на переміщення і напруження у півпросторі. У [10] розглянуто пружний напівпростір із циліндричною порожниною скінченної довжини, що знаходиться під дією гармонічної за часом сили кручення. Використано метод інтегрального перетворення Фур'є та крайова задача зводиться до узагальненого сингулярного інтегрального рівняння Коші. Отримані інтегральні подання напруження та переміщення, які у виродженому випадку співпадають з аналогічними для статичної постановки задачі. У роботі [11] отримано числовий розв'язок задачі про різні типи навантажень циліндричного включення, жорстко закріпленого із пружним півпростором. Ключовим моментом в його побудові є використання інтегрального перетворення типу Вебера. Найбільш загальний вид таких перетворень отримано в [12]. Розв'язок задачі у статичній постановці для шару з циліндричним включенням наведено у [13], де запропоновано метод, що базується на застосуванні векторного інтегрального перетворення типу Вебера без використання зображень Папковича - Нейбера, що суттєво спростило розв'язання. У [14] проаналізовано напружений стан скінченного циліндру з урахуванням його власної ваги під дією осесиметричного навантаження. У роботі [15] запропонованим методом отримано точний розв'язок задачі усталених коливань пружного шару з циліндричним включенням, коли на поверхні включення задано умови гладкого контакту, а в [16] побудовано наближений розв'язок у випадку жорсткого зчеплення включення із пружним шаром.

У даній роботі розглянуто усталені коливання півпростору з циліндричним включенням із застосуванням методу матричного диференціального числення, розробленого Поповим Г.Я. [1].

Пружний півпростір $a < r < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < z < \infty$ з коефіцієнтом Пуассона μ та модулем зсуву G наскрізь ослаблений круговим жорстким включенням $0 \leq r \leq a$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 < z < \infty$, який зчеплений з середовищем. По грані півпростору $z=0$ діє осесиметричне гармонічне стискальне навантаження $p(r,t) = P(r)e^{-i\omega t}$, ω – частота коливань. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, надалі опускаємо та розглядаємо тільки амплітудні значення коливань півпростору $u_r(r,z) \equiv u(r,z)$, $u_z(r,z) \equiv w(r,z)$, що задовольняють осесиметричним рівнянням руху [2]

$$\begin{aligned} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] - r^{-2} u(r, z) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial r \partial z} &= -k_1^2 u(r, z), \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \right] &= -k_2^2 w(r, z), \end{aligned} \quad (1)$$

де $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$ – хвильові числа, c_1, c_2 – швидкості розповсюдження поздовжньої та поперечної хвилі відповідно, $\kappa = 3 - 4\nu$, та крайовим умовам

$$\sigma_z(r, 0) = -P(r), \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u_r(a, z) = 0, u_z(a, z) = 0. \quad (3)$$

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є побудова аналітико-числового розв'язку задачі про усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикальним циліндричним жорстким включенням, зчепленим з півпростором, під дією гармонічного навантаження, заданого на плоскій грані.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Введемо наступні безрозмірні координати

$$\rho = a^{-1}r, \xi = a^{-1}z, \rho \in [1, \infty), \xi \in [0, \infty).$$

Позначимо переміщення $u(r, z) = U(\rho, \xi)$, $w(r, z) = W(\rho, \xi)$ та запишемо рівняння руху (1) в нових координатах

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right] - \rho^{-2} U + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \xi} &= -k_1^2 U(\rho, \xi), \\ \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\kappa-1} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] &= -k_2^2 W(\rho, \xi), \end{aligned} \quad (4)$$

тут і далі k_1, k_2 означають безрозмірні хвильові числа ak_j , тобто $k_2 = \Omega$, $k_1 = \Omega \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$.

Умови жорсткого закріплення (3) для $r = a$, враховуючи заміну, набувають вигляду

$$U(1, \xi) = 0, W(1, \xi) = 0. \quad (5)$$

Умови на грані $z = 0$ півпростору запишемо враховуючи зв'язок між переміщеннями та напруженнями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, 0)}{\partial \rho} + \frac{\partial U(\rho, 0)}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial U(\rho, 0)}{\partial \rho} + \rho^{-1} U(\rho, 0) + \frac{1+\kappa}{3-\kappa} \frac{\partial W(\rho, 0)}{\partial \xi} &= -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P(\rho). \end{aligned} \quad (6)$$

Послідовно застосуємо до системи (4) та граничних умов (6) інтегральне перетворення [12] Вебера за змінною ρ

$$U_\lambda(\xi) = \int_1^\infty \rho U(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, U(\rho, \xi) = \int_0^\infty \frac{\lambda U_\lambda(\xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)},$$

$$W_{\lambda}(\xi) = \int_1^{\infty} \rho W(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, \quad W(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda W_{\lambda}(\xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)}, \quad (7)$$

де $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $J_i(\lambda)$, $N_i(\lambda)$ – відповідно функції Бесселя та Неймана, $i = 0, 1$.

Це приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант

$$U_{\lambda}''(\xi) - \frac{2}{\kappa-1} \lambda W_{\lambda}'(\xi) - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda^2 U_{\lambda}(\xi) + k_2^2 U_{\lambda}(\xi) = 0, \\ W_{\lambda}''(\xi) + \frac{2}{\kappa+1} \lambda U_{\lambda}'(\xi) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 W_{\lambda}(\xi) + k_1^2 W_{\lambda}(\xi) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \chi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (8)$$

де $\chi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \xi)$ – невідома функція. Штрихом позначено похідну за аргументом.

Крайові умови (6) у трансформантах (7) записано у формі

$$\lambda U_{\lambda}(0) + \frac{1+\kappa}{3-\kappa} W_{\lambda}'(0) = -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P_{\lambda}, \quad U_{\lambda}'(0) - \lambda W_{\lambda}(0) = 0, \quad (9)$$

$$P_{\lambda} = \int_1^{\infty} \rho P_p(a\rho) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho.$$

Отриману одновимірну крайову задачу (8), (9) сформулюємо у векторній формі. Введемо до розгляду невідомий вектор трансформант переміщень, матриці та диференціальний оператор

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{\lambda}(\xi) \\ W_{\lambda}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\kappa-1} \\ \frac{2}{\kappa+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_2^2 & 0 \\ 0 & k_1^2 \end{pmatrix} \\ L_2 \mathbf{y}(\xi) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + \lambda \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - (\lambda^2 \mathbf{P} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{y}(\xi). \quad (10)$$

Крайові умови (9) переписано за допомогою граничного функціонала

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(0) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(0), \\ \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\kappa+1}{3-\kappa} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючі (10), задачу (8), (9) запишемо у векторній формі

$$L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{f}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \\ U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \gamma, \quad (11)$$

$$\text{де } \mathbf{f}(\xi) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\xi) \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -\frac{a}{G} \frac{\kappa-1}{3-\kappa} P_{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як показано у [1] розв'язок задачі (11) можна сконструювати у зображенні

$$\mathbf{y}(\xi) = \int_0^{\infty} \Phi(\xi, \eta) \mathbf{f}(\eta) d\eta + \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C}, \quad (12)$$

де $\Phi(\xi, \eta)$ – фундаментальна матриця-функція рівняння (11), $\mathbf{Y}_-(\xi)$ – спадаючий розв'язок відповідного (11) однорідного матричного рівняння, $\mathbf{C}$ – вектор констант, який знаходиться із крайових умов (9).

Розглянемо відповідне (11) однорідне рівняння $L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}$, $0 < \xi < \infty$. З метою побудувати його розв'язок необхідно попередньо знайти розв'язок відповідного матричного рівняння $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}$. Якщо матрицю подати у формі $\mathbf{Y}(\xi) = e^{s\xi} \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ – одинична матриця, то можна перевірити виконання співвідношення $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = L_2 e^{s\xi} \mathbf{I} = e^{s\xi} \mathbf{M}(s)$, де характеристична матриця $\mathbf{M}(s)$ має вигляд

$$\mathbf{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^2 & -\frac{2}{\kappa-1} \lambda s \\ \frac{2}{\kappa+1} \lambda s & s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_1^2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння відповідно має форму [1]

$$\mathbf{Y}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathbf{M}^{-1}(s) e^{s\xi} ds,$$

де C – замкнений контур, що містить всі полюси підінтегральної функції. Цими полюсами будуть нулі визначника матриці $\mathbf{M}^{-1}(s)$, що має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{M}_0(s)}{\det \mathbf{M}(s)}, \quad \det \mathbf{M}(s) = \left[s^2 - \left(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \right)^2 \right] \left[s^2 - \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right)^2 \right],$$

$$\mathbf{M}_0(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa+1} + k_1^2 & \frac{2}{\kappa-1} \lambda s \\ -\frac{2}{\kappa+1} \lambda s & s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa-1} + k_2^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо зафіксувати полюси $s = -\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $s = -\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ та замкнути контур C_- , отримаємо спадаючий розв'язок $\mathbf{Y}_-(\xi)$. Використання теореми про лишки завершує розв'язання рівняння $L_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{Y}_-(\xi) = \frac{1}{2k_2^2} \left[e^{-\Delta_1 \xi} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2}{\Delta_1} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \\ -\lambda & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Delta_1 \end{pmatrix} + e^{-\Delta_2 \xi} \begin{pmatrix} \Delta_2 & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \\ \lambda & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}. \quad (14)$$

Для знаходження фундаментальної матриці-функції $\Phi(\xi, \eta)$ довизначимо функцію $\mathbf{f}(\xi)$ у правій частині рівняння (11) нулем на всю дійсну вісь та застосуємо до рівняння інтегральне перетворення Фур'є, звідки отримано, що

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^{-1}(is) e^{-is(\xi-\eta)} ds$$

Обернена $\mathbf{M}^{-1}(is)$ до характеристичної матриці, побудована на основі оператора (10) та має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(is) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} -s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + k_1^2 & \frac{2}{\kappa-1} \lambda is \\ -\frac{2}{\kappa+1} \lambda is & -s^2 - \lambda^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + k_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{M} = \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \right)^2 \right] \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right)^2 \right].$$

Після замикання контурів $C_{\pm}$ таким чином, щоб виконувались умови Леми Жордана та застосування основної теореми про лишки, маємо

$$\Phi(\xi, \eta) = i \begin{cases} -\underset{s_1}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right) - \underset{s_3}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right), & \xi - \eta > 0 \\ \underset{s_2}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right) + \underset{s_4}{\text{res}} \left(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is) \right), & \xi - \eta < 0 \end{cases},$$

де полюси першого порядку мають вигляд

$$s_1 = -i\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad s_3 = -i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad s_2 = i\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad s_4 = i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

В результаті фундаментальна матриця-функція набуває вигляду

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2k_2^2} \left[e^{-\Delta_1 |\xi-\eta|} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2}{\Delta_1} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \\ -\lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Delta_1 \end{pmatrix} + e^{-\Delta_2 |\xi-\eta|} \begin{pmatrix} \Delta_2 & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \\ \lambda \operatorname{sgn}(\xi-\eta) & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \right].$$

Таким чином з (12), запишемо загальну форму розв'язку у векторній формі

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{\lambda}(\xi) \\ W_{\lambda}(\xi) \end{pmatrix} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\eta) \end{pmatrix} d\eta + \begin{pmatrix} y_{11}^{-}(\xi) & y_{12}^{-}(\xi) \\ y_{21}^{-}(\xi) & y_{22}^{-}(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

Трансформанти переміщень відповідно мають форму

$$U_{\lambda}(\xi) = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2k_2^2} \lambda \int_0^{\infty} \chi(\eta) \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \left[e^{-\Delta_1 |\xi-\eta|} - e^{-\Delta_2 |\xi-\eta|} \right] d\eta + y_{11}^{-}(\xi) C_0 + y_{12}^{-}(\xi) C_1,$$

$$W_{\lambda}(\xi) = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2k_2^2} \int_0^{\infty} \chi(\eta) \left[\Delta_1 e^{-\Delta_1 |\xi-\eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 |\xi-\eta|} \right] d\eta + y_{21}^{-}(\xi) C_0 + y_{22}^{-}(\xi) C_1. \quad (15)$$

Введемо позначення

$$T = 2\lambda^2 - k_2^2, \quad Q = T - 2\Delta_1 \Delta_2, \quad R(\lambda) = T^2 - 4\lambda^2 \Delta_1 \Delta_2, \quad k_1^2 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} k_2^2. \quad (16)$$

Виконання крайових умов (9) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих констант

$$\frac{\lambda Q}{k_2^2 \Delta_1} C_0 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} C_1 = g_1, \quad C_0 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda Q}{k_2^2 \Delta_2} C_1 = g_2,$$

де

$$g_1 = -2 \frac{a}{G} P_\lambda - \frac{\chi_0(1, \lambda)}{k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left[(2\lambda^2 - k_2^2) e^{-\Delta_1 \eta} - 2\lambda^2 e^{-\Delta_2 \eta} \right] d\eta,$$

$$g_2 = \frac{\chi_0(1, \lambda)}{k_2^2} \lambda \int_0^\infty \chi(\eta) \left[2\Delta_1 e^{-\Delta_1 \eta} - \frac{2\lambda^2 - k_2^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 \eta} \right] d\eta.$$

Визначник системи має вигляд

$$\det = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda^2 Q^2 - k_2^4 \Delta_1 \Delta_2}{k_2^4 \Delta_1 \Delta_2} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}{k_2^4 \Delta_1 \Delta_2}$$

та дорівнює нулю, коли

$$R(\lambda) = (2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad \lambda = k_R - \text{корінь хвилі Релея.} \quad (17)$$

Множник $\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2$ на дійсній півосі не перетворюється на нуль,

$$C_0 = \frac{k_2^2 \Delta_1 (\lambda Q \cdot g_1 - k_2^2 \Delta_2 \cdot g_2)}{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}, \quad C_1 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{k_2^2 \Delta_2 (\lambda Q \cdot g_2 - k_2^2 \Delta_1 \cdot g_1)}{[\lambda^2 - \Delta_1 \Delta_2] R(\lambda)}.$$

Після підстановки отриманих констант у розв'язок (15), та врахування вигляду елементів y_{ij}^- , $i, j = 1, 2$ спадаючого розв'язку (13), отримано розв'язок одновимірної векторної крайової задачі (11), (9)

$$U_\lambda(\xi) = \frac{a}{G} \frac{P_\lambda}{R(\lambda)} \left[\lambda T \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\lambda \Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left\{ \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 (\xi + \eta)} - 4\lambda^2 T e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta} - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta} + R e^{-\Delta_2 (\xi + \eta)} \right] \right\} d\eta,$$

$$W_\lambda(\xi) = \frac{a}{G} \frac{P_\lambda \Delta_1}{R(\lambda)} \left[T \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\lambda^2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] -$$

$$- \frac{1}{\pi \lambda k_2^2} \int_0^\infty \chi(\eta) \left\{ \left[\Delta_1 e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \right.$$

$$+\frac{1}{R(\lambda)}\left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1(\xi+\eta)}-4\lambda^2 T \Delta_1\left(e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta}+e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta}\right)+\frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2(\xi+\eta)}\right]\left\} d \eta .\right.$$

Тут було враховано, що згідно с формулою (17)

$$\chi_0(1, \lambda)=J_0(\lambda) N_1(\lambda)-N_0(\lambda) J_1(\lambda)=-\frac{2}{\pi \lambda},$$

а також позначення

$$R=T^2+4 \lambda^2 \Delta_1 \Delta_2 .$$

Для отримання розв'язку вихідної задачі (4)-(6) необхідно до отриманих трансформант (18) застосувати обернене інтегральне перетворення Вебера (7).

Під час розв'язання залишилася нереалізованою крайова умова на циліндричній поверхні включення із (5), а саме $W(1, \xi)=0$. Після вимоги її виконання на основі розв'язку (18) для $W(\rho, \xi)$ отримано інтегральне рівняння відносно невідомої функції

$$\chi(\eta)=\frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$$

у вигляді

$$\int_0^{\infty} \chi(\eta) K(\xi, \eta) d \eta=F(\xi), \quad 0<\xi<\infty, \quad (19)$$

$$F(\xi)=\frac{2}{\pi} \frac{a}{G} \int_0^{\infty} \frac{P_{\lambda}}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)}\left[T \cdot e^{-\Delta_1 \xi}-2 \lambda^2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi}\right] d \lambda,$$

$$K(\xi, \eta)=\frac{2}{\pi^2 k_2^2} \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda} \frac{1}{f(\lambda)}\left[\Delta_1 e^{-\Delta_1|\xi-\eta|}-\frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|\xi-\eta|}\right]+\right. \\ \left.+\frac{1}{R(\lambda)}\left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1(\xi+\eta)}-4 \lambda^2 T \Delta_1\left(e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta}+e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta}\right)+\frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2(\xi+\eta)}\right]\right\} d \lambda,$$

$$f(\lambda)=J_1^2(\lambda)+N_1^2(\lambda). \quad (20)$$

Функції Δ_1, Δ_2 визначені в (14), $T, R(\lambda)$ – у (16).

Визначимо по грані півпростору крайові умови (2) або в новій системі координат умови (6). Гармонічне навантаження $p(r, t)=P(r) e^{-i \omega t}$: стискальна сила інтенсивності q зосереджена по колу радіусу $b, b>a$, (a – радіус включення) – $p(r, t)=q \delta(r-b) e^{-i \omega t}$, $\delta(r)$ – функція Дірака. В цьому випадку трансформанта навантаження (9) має вигляд

$$P_{\lambda}=q \frac{b}{a} \frac{1}{a} \chi_0\left(\frac{b}{a}, \lambda\right)=q \frac{b}{a^2}\left[J_0\left(\frac{b}{a} \lambda\right) N_1(\lambda)-N_0\left(\frac{b}{a} \lambda\right) J_1(\lambda)\right]. \quad (21)$$

Для порівняння розглянуто також рівномірний тиск інтенсивності p_0 , прикладений на кільцевій ділянці грані, що прилягає до включення $p(r, t) = p_0 e^{-i\omega t}$, $a < r < b$ і $p(r, t) = 0$, $r > b$. Враховуючи співвідношення $\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \chi_1(\rho, \lambda)] = \lambda \rho \chi_0(\rho, \lambda)$ і $\chi_1(1, \lambda) = 0$, з (9) отримуємо

$$P_\lambda = p_0 \int_1^{b/a} \rho \chi_0(\rho, \lambda) d\rho = p_0 \frac{b}{a} \frac{\chi_1(b/a, \lambda)}{\lambda}. \quad (22)$$

Щоб порівняння (21) та (22) було коректним, інтенсивність p_0 вибрано так, щоб сумарна сила збігалася з сумарною силою кільцевого зосередженого навантаження

$$\pi(b^2 - a^2)p_0 = 2\pi b q, \text{ тобто } p_0 = \frac{2bq}{b^2 - a^2}.$$

В силу того, що $\tau_{\rho\xi} = G\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$, маємо, що на циліндричній поверхні $\rho = 1$, $0 < \xi < \infty$ жорсткого включення невідома функція $\chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$ має механічний зміст дотичного напруження. Визначимо порядок особливості невідомої функції для $\eta = 0$. Для цього розглянемо клиноподібну область [18], в даному випадку кут дорівнює $\pi/2$. Таким чином, для $\eta = 0$ маємо випадок, коли одну границю клину закріплено, а по іншій діє сила. В цьому випадку розв'язок $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$ має особливість γ , яка залежить від значення коефіцієнту Пуассона

$$\mu = 1/4 \Rightarrow \gamma = -0.25525; \mu = 1/3 \Rightarrow \gamma = -0.31001.$$

В результаті маємо на поверхні включення

$$\tau_{\rho\xi}(1, \xi) = \frac{G}{a} \chi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (23)$$

а сила, що передається на включення має вигляд

$$F_{\text{вкл}} = 2\pi a \int_0^\infty \tau_{\rho\xi}(a, z) dz = 2\pi a G \int_0^\infty \chi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Розв'язок рівняння (19) будемо розшукувати методом колокацій. Інтервал $[0, \infty)$ замінимо відрізком $[0, L_\eta]$, на якому невідома функція $\chi(\eta)$ практично згасає, і розіб'ємо його $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = L_\eta$. Сітку згущено з урахуванням особливості $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$. Невідому функцію подамо кусково-сталою

$$\chi(\eta) = \sum_{n=1}^N x_n \theta_n(\eta), \quad \theta_n(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta_{n-1} < \eta < \eta_n \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (25)$$

x_n – невідомі константи.

Вимагаючи виконання рівняння (19) у середині елементів $\xi_m = \frac{1}{2}(\eta_{m-1} + \eta_m)$, $m = 1, \dots, N$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} x_n = F(\xi_m), \quad m = \overline{1, N}, \quad (26)$$

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\lambda f(\lambda)} \left[\Delta_1 I_{mn}(\Delta_1) - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} I_{mn}(\Delta_2) \right] + \frac{1}{R(\lambda)} \left[\Delta_1 R e^{-\Delta_1 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\lambda^2 T \Delta_1 \left(e^{-\Delta_1 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_2) + e^{-\Delta_2 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_1) \right) + \frac{\lambda^2}{\Delta_2} R e^{-\Delta_2 \xi_m} \Lambda_n(\Delta_2) \right] \right\} d\lambda,$$

де інтеграли по η від експонент обчислені у замкненому вигляді ($h_n = \eta_n - \eta_{n-1}$)

$$I_{mn}(\Delta) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} e^{-\Delta|\xi_m - \eta|} d\eta = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\eta_{n-1} - \xi_m)}, & \xi_m < \eta_{n-1}, \\ \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\xi_m - \eta_n)}, & \xi_m > \eta_n, \\ \frac{2(1 - e^{-\Delta h_n/2})}{\Delta}, & m = n, \end{cases},$$

$$\Lambda_n(\Delta) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} e^{-\Delta \eta} d\eta = \frac{e^{-\Delta \eta_{n-1}} - e^{-\Delta \eta_n}}{\Delta}, \quad \operatorname{Re} \Delta \geq 0, \quad \Delta = \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

Завдяки аналітичному інтегруванню по η логарифмічна особливість ядра $K(\xi, \eta)$ в (19) не потребує окремої обробки. Систему (26) розв'язано методом Гаусса. Знайдені константи x_n підставляються у вираз (25), який в свою чергу підставляється у переміщення $U(\rho, \xi)$, $W(\rho, \xi)$ (18), (7).

Таким чином, знайдено наближений розв'язок задачі про усталені коливання для пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням.

Для визначення прогину плоскої грані півпростору $\xi = 0$ скористаємося формулами (7), (18) та знайдемо амплітуду

$$W(\rho, 0) = \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} W_\lambda(0) d\lambda = -\frac{a}{G} k_2^2 \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} d\lambda - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \int_0^\infty \chi(\eta) \left[2\lambda^2 e^{-\Delta_2 \eta} - (2\lambda^2 - k_2^2) e^{-\Delta_1 \eta} \right] d\eta d\lambda,$$

тут $\chi_0(\rho, \lambda) = J_0(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_0(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$, трансформанта P_λ визначена у (21) або (22), $R(\lambda)$ у (17), $f(\lambda)$ у (20). Звідси

$$W(\rho, 0) = -\frac{a}{G} k_2^2 \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} d\lambda - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N x_n \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \left[2\lambda^2 \Lambda_n(\Delta_2) - (2\lambda^2 - k_2^2) \Lambda_n(\Delta_1) \right] d\lambda. \quad (28)$$

Перший доданок (28) – розв'язок задачі Лемба для зосередженого навантаження півпростору без включення, другий – внесок включення.

При $\Omega \rightarrow 0$ ($k_2 \rightarrow 0$) маємо з (14): $\Delta_j \rightarrow \lambda$, $j = 1, 2$, з (17): $R(\lambda) \sim -\frac{4}{\kappa+1} k_2^2 \lambda^2$, отже трансформанта першого доданка (28)

$$W_\lambda^{(P)}(0) = -\frac{a}{G} \frac{P_\lambda k_2^2 \Delta_1}{R(\lambda)} \rightarrow \frac{a}{G} (1-\mu) \frac{P_\lambda}{\lambda},$$

а сам перший доданок (28) переходить у розв'язок статичної задачі Буссінеска для кільцевого навантаження [19]:

$$W^{(P)}(\rho, 0) = \frac{a}{G} (1-\mu) \int_0^\infty \frac{\chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)} d\lambda. \quad (29)$$

Це слугує контролем правильності отриманих трансформант. Чисельно при $\Omega = 0.005$ перший доданок (28) збігається зі статичним розв'язком (29) з точністю до 10^{-4} . Тут $(\kappa+1)/4 = 1-\mu$. Граничний перехід перевірено чисельно: Для $\rho = 1.5; 3; 5$ при $\Omega \rightarrow 0$ дійсна частина (28) прямує до статичного значення (29), уявна – до нуля:

	$\rho = 1.5$	$\rho = 3$	$\rho = 5$
$\Omega = 0.005, \text{Re}W^{(P)}(\rho, 0)$	0.84868	0.52280	0.28212
Статична формула	0.84876	0.52278	0.28218

Уявна частина при $\Omega = 0.005$ становить 0.004.

Для першого доданку (28) уявну та дійсну частини можна виписати у явному вигляді. Введемо позначення

$$\delta_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2}, \lambda < k_j, j = 1, 2 \Rightarrow \Delta_j = -i\delta_j, g(\rho, \lambda) = \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda) P_\lambda}{f(\lambda)}.$$

На трьох ділянках маємо

$$0 < \lambda < k_1 : \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} = \frac{-i\delta_1}{T^2 + 4\lambda^2 \delta_1 \delta_2}; \quad \lambda > k_2 : \frac{\Delta_1}{R(\lambda)} \text{ дійсне};$$

$$k_1 < \lambda < k_2 : \frac{\Delta_1 (T^2 - 4i\lambda^2 \Delta_1 \delta_2)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2};$$

Звідси уявна і дійсна частини першого доданка (28) мають вигляд

$$\text{Im}W^{(P)}(\rho, 0) = \frac{a}{G} k_2^2 \left[\int_0^{k_1} \frac{\delta_1 g(\rho, \lambda)}{T^2 + 4\lambda^2 \delta_1 \delta_2} d\lambda + \int_{k_1}^{k_2} \frac{4\lambda^2 \Delta_1^2 \delta_2 g(\rho, \lambda)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2} d\lambda - \pi \frac{\Delta_1 g(\rho, \lambda)}{R'(\lambda)} \Big|_{\lambda=k_R} \right],$$

$$\text{Re}W^{(P)}(\rho, 0) = -\frac{a}{G} k_2^2 \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{T^2 \Delta_1 g(\rho, \lambda)}{T^4 + 16\lambda^4 \Delta_1^2 \delta_2^2} d\lambda + \text{v.p.} \int_{k_2}^\infty \frac{\Delta_1 g(\rho, \lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \right].$$

Сталі χ_n в (28) комплексні, тому уявна та дійсні частини повного розв'язку обчислюється в цілому.

Нормальне напруження $\sigma_\rho(\rho, \xi)$ знаходиться за формулою [13]

$$\sigma_p(\rho, \xi) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{G}{a} \left[\frac{\partial U(\rho, \xi)}{\partial \rho} + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \left\{ \frac{1}{\rho} U(\rho, \xi) + \frac{\partial W(\rho, \xi)}{\partial \xi} \right\} \right].$$

На циліндричній поверхні включення $\rho=1$, $\xi \in [0, \infty]$, маємо з (5) рівність нулю переміщень, а значить і $\frac{\partial W(1, \xi)}{\partial \xi} = 0$. Тоді з формули залишається

$$\sigma_p(1, \xi) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{G}{a} \frac{\partial U(1, \xi)}{\partial \rho}.$$

Використовуючи (7) та $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $i = 0, 1$, будемо мати

$$\chi_0(1, \lambda) = -\frac{2}{\pi\lambda}, \quad \chi_1(1, \lambda) = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi_1(\rho, \lambda)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -\frac{2}{\pi}.$$

На базі розв'язку (18), (7) отримано наступний вираз нормального напруження

$$\begin{aligned} \frac{a}{G} \sigma_p(1, \xi) = & -\frac{2}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{a}{G} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 P_\lambda}{f(\lambda) R(\lambda)} \left[(2\lambda^2 - k_2^2) \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^\infty \frac{\lambda}{f(\lambda)} \int_0^\infty \chi(\eta) K_U(\xi, \eta, \lambda) d\eta d\lambda, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} K_U(\xi, \eta, \lambda) = & \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[e^{-\Delta_1 |\xi - \eta|} - e^{-\Delta_2 |\xi - \eta|} \right] + \\ & + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 (\xi + \eta)} - 4\lambda^2 T e^{-\Delta_1 \xi} e^{-\Delta_2 \eta} - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} e^{-\Delta_1 \eta} + R e^{-\Delta_2 (\xi + \eta)} \right]. \end{aligned}$$

Після підстановки $\chi(\eta)$ з (25) у (30) доданки з експонентами $e^{-\Delta_j \eta}$ у $K_U(\xi, \eta, \lambda)$ дають $\Lambda_n(\Delta_j)$ з (27). Доданок із $\operatorname{sgn}(\xi - \eta)$ також інтегрується по η в замкненому вигляді ($h_n = \eta_n - \eta_{n-1}$)

$$S_n(\Delta, \xi) = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) e^{-\Delta |\xi - \eta|} d\eta = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\xi - \eta_n)}, & \xi > \eta_n, \\ -\frac{1 - e^{-\Delta h_n}}{\Delta} e^{-\Delta(\eta_{n-1} - \xi)}, & \xi < \eta_{n-1}, \\ \frac{e^{-\Delta(\eta_n - \xi)} - e^{-\Delta(\xi - \eta_{n-1})}}{\Delta}, & \eta_{n-1} < \xi < \eta_n. \end{cases}$$

Тоді нормальне напруження (30) на поверхні включення набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{a}{G} \sigma_p(1, \xi) = & -\frac{2}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{a}{G} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 P_\lambda}{f(\lambda) R(\lambda)} \left[(2\lambda^2 - k_2^2) \cdot e^{-\Delta_1 \xi} - 2\Delta_1 \Delta_2 \cdot e^{-\Delta_2 \xi} \right] d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi^2 k_2^2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \sum_{n=1}^N x_n \int_0^\infty \frac{\lambda}{f(\lambda)} \left\{ S_n(\Delta_1, \xi) - S_n(\Delta_2, \xi) + \frac{1}{R(\lambda)} \left[R e^{-\Delta_1 \xi} \Lambda_n(\Delta_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\Delta_1 \Delta_2 T e^{-\Delta_2 \xi} \Lambda_n(\Delta_1) + R e^{-\Delta_2 \xi} \Lambda_n(\Delta_2) \right] \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (31)$$

Амплітуда нормального напруження має вигляд

$$|\sigma_p(1, \xi)| = \sqrt{(\operatorname{Re} \sigma_p(1, \xi))^2 + (\operatorname{Im} \sigma_p(1, \xi))^2}.$$

Для аналізу поведінки підінтегральної функції при скористаємося асимптотикою циліндричних функцій $J_1(\lambda) \sim \lambda/2$, $N_1(\lambda) \sim -2/\pi\lambda$ та (20), (14), (17). Отже

$$f(\lambda) \sim \frac{4}{\pi^2 \lambda^2}, \quad \chi_0(\rho, \lambda) \sim -\frac{2}{\pi \lambda}, \quad \frac{\chi_0(\rho, \lambda)}{f(\lambda)} \sim -\frac{\pi \lambda}{2} \rightarrow 0, \quad \Delta_j \rightarrow -ik_j, \quad R(\lambda) \rightarrow k_2^4.$$

Тому підінтегральна функція першого доданка (28) поводить як $O(\lambda)$, а ядро рівняння (19) містить множник $1/(\lambda f(\lambda)) \sim \pi^2 \lambda/4$. Точка $\lambda = 0$ не є особливою.

При $\lambda \rightarrow \infty$ маємо

$$f(\lambda) \sim \frac{2}{\pi \lambda}, \quad \chi_0(\rho, \lambda) \sim -\frac{2}{\pi \lambda \sqrt{\rho}} \cos((\rho-1)\lambda), \quad \Delta_j \sim \lambda - \frac{k_j^2}{2\lambda}, \quad R(\lambda) \sim -\frac{4}{\kappa+1} k_2^2 \lambda^2.$$

Звідси підінтегральна функція першого доданка (28) має порядок

$$\frac{\kappa+1}{2\pi\sqrt{\rho b/a}} \frac{\cos((\rho-1)\lambda) \cos((b/a-1)\lambda)}{\lambda}.$$

Інтеграл збігається умовно при $\rho \neq b/a$. При $\rho = b/a$ він має логарифмічну особливість, що відповідає переміщенню під лінією дії зосередженої сили.

Доданки з $\chi(\eta)$ спадають швидко, якщо $\chi(\eta) \sim C\eta^\gamma$ при $\eta \rightarrow 0$, то

$$2\lambda^2 E_2 - TE_1 \sim C\Gamma(\gamma+1) \left[(\gamma+1)(k_2^2 - k_1^2) + k_2^2 \right] \lambda^{-\gamma-1}, \quad \text{де } E_j = \int_0^\infty \chi(\eta) e^{-\Delta_j \eta} d\eta.$$

Тоді підінтегральна функція другого доданка (28) має порядок $\lambda^{-\gamma-2}$ і при $\gamma > -1$ інтеграл збігається абсолютно.

Ядро інтегрального рівняння (19) при $\lambda \rightarrow \infty$ містить $1/(\lambda f(\lambda)) \rightarrow \pi/2$ і

$$\Delta_1 e^{-\Delta_1 |\xi-\eta|} - \frac{\lambda^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 |\xi-\eta|} \sim -\frac{k_1^2 + k_2^2}{2\lambda} e^{-\lambda |\xi-\eta|}.$$

Тому ядро має логарифмічну особливість

$$K(\xi, \eta) = \frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)} \ln |\xi - \eta| + O(1), \quad \eta \rightarrow \xi.$$

Це слабка (інтегрована) особливість, характерна для рівнянь першого роду.

Як і було показано невідома функція $\chi(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ має степеневу особливість кута клину $\pi/2$, одна грань закріплена, інша – вільна. Чисельний розв'язок дає $|\chi(\eta)| \sim \eta^{-0.315}$ (для одиничної частоти), що узгоджується з η^γ , $\gamma = -0.31001$, знайденим аналітично: $\chi(\eta)$ має інтегровану особливість у кутовій точці. Тому сітку по η згущено до малого значення η . При $\eta \rightarrow \infty$ функція $\chi(\eta)$ спадає, що забезпечує збіжність інтегралів по η .

У формулах (20), (28), (31) інтеграли беруться за змінною λ від нуля до нескінченності. Особливими точками підінтегральних функцій на дійсній півосі є $\lambda = 0$, точки розгалуження $\lambda = k_1$, $\lambda = k_2$ і простий полюс $\lambda = k_R$ – корінь рівняння (17): $R(\lambda) = 0$ (при $\mu = 1/3$, $k_R \approx 1.07236k_2$). Гілки коренів (14) вибираються із умов випромінювання при множителі $e^{-i\omega t}$: головна гілка $\operatorname{Re} \Delta_j \geq 0$, а при $0 \leq \lambda < k_j$ – $\Delta_j = -i\sqrt{k_j^2 - \lambda^2}$. Відповідно полюс k_R обходиться знизу, тобто $\int_0^\infty = \text{v.p.} \int_0^\infty + i\pi \operatorname{Res}(\lambda = k_R)$. Те саме дає інтегрування по контуру, зміщеному в нижню півплощину: $\lambda = t - i\delta \sin(\pi t / L)$, $0 \leq t \leq L$, $L = 1.3k_R + 1 > k_R$, $\delta = \min(0.5; 0.3k_2)$ Особливості k_1, k_2 мають вигляд $\sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$ і є інтегрованими. При $\lambda > L$ інтегрування ведеться по дійсній осі: для ядра рівняння (20) – до $\lambda \sim 10^5$ на логарифмічно розподілених проміжках, для (28), (31) – до $\lambda = 600$. На кожному проміжку застосовано формулу Гаусса-Лежандра (8-10 вузлів). Точність перевірено порівнянням з явними формулами в задачі Лемба – збіг до 10^{-5} і подвоєнням числа вузлів. Невідому функцію $\chi(\eta)$ на $[0, L_\eta]$, $L_\eta = 8 \div 20$ апроксимовано на сітці: перший крок $2 \cdot 10^{-3}$, коефіцієнт зростання 1.15, найбільший крок $\min[0.25; 2\pi/(10\Omega)]$, Ω – частота. Інтегральне рівняння (19) задовольняється в середині елементів, тобто методом колокацій. Інтеграли по η від експонент у ядрі обчислені аналітично (27), тож логарифмічна особливість ядра окремої обробки не потребувала. Одержану систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язано методом Гаусса.

В формулі (31) при $\xi > 0$ підінтегральна функція містить множники $e^{-\Delta_j \xi}$, тож інтеграли по λ збігаються абсолютно. При $\xi \rightarrow 0$ напруження $\sigma_\rho(1, \xi)$ має степеневу особливість кутової точки, що й невідома $\chi(\eta) \sim \eta^\gamma$. Тому значення $\sigma_\rho(1, \xi)$ обчислювались для $\xi > 0$.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунки амплітуд переміщення (28) плоскої грані та нормального напруження на циліндричному включенні (31) проводилися в залежності від Ω – безрозмірної частоти коливань. Розглянуто півпростір з коефіцієнтом Пуассона $\mu = 1/3$ та відповідно $\gamma = -0.31001$. Для середовища з $\mu = 1/3$ має місце зв'язок між швидкостями хвиль $c_1 = 2c_2$.

Таким чином функції (14) мають форму $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega^2} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}\Omega^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 - \Omega^2}$.

Застосовані позначення на осях: q – інтенсивність навантаження, зосередженого по колу радіуса b . Обидва стискальні навантаження: зосереджене по колу (21) і рівномірно розподілене по кільцю (22) мають однакову сумарну силу $F = 2\pi b q$; a – радіус кола жорсткого включення; $b/a = 2$.

На рис. 1, 2 наведено амплітуду прогину (28) грані в низькочастотному діапазоні. В усіх випадках виконується умова $W(1, \xi) = 0$ жорсткого зчеплення з включенням. Включення істотно зменшує прогин грані. При $\Omega = 0.1$ на відстані $\rho = 6$ прогин з

включенням приблизно в 3.5 рази менший, ніж у півпросторі без включення (пунктир), а біля включення відмінність принципова. Криві без включення при $\Omega \rightarrow 0$ збігаються з розв'язком задачі Буссінеска (29). Під зосередженою силою прогин має логарифмічну особливість. Розподілений по кільцю тиск дає гладкий прогин з максимумом при $\rho \approx 1.7$, всередині області навантаження. Зі зростанням частоти в межах $\Omega \leq 1$ картина змінюється мало, тобто поле залишається квазістатичним.

У високочастотному діапазоні (рис. 3, 4) поле має хвильовий характер. Для зосередженої сили між включенням і лінією навантаження $1 < \rho < 2$ утворюється система стоячих хвиль, обумовлена відбиттям поверхневої хвилі Релея від включення. За лінією навантаження амплітуда змінюється повільно. При $\Omega = 10$ на відстані $\rho = 6$ вона перевищує амплітуду для півпростору без включення: включення стає вторинним джерелом хвиль. Розподілений тиск за межами області навантаження збуджує значно слабші хвилі, ніж зосереджена сила з однаковою сумарною силою: при $\Omega = 5$ приблизно в 5 разів, що пояснюється інтерференцією хвиль, що збуджуються різними ділянками навантаженої зони.

На рис. 5, 6 наведено амплітуди дотичного (23) та нормального напружень (31) на поверхні включення. Обидва напруження мають особливість у кутовій точці $\xi = 0$ і згасають з глибиною. На низьких частотах рівномірний тиск, прикладений впритул до включення, дає значно більшу концентрацію дотичного напруження навколо кутової точки, ніж зосереджена по колу сила (при $\Omega = 0.5$ приблизно втричі). На високих частотах уздовж включення формуються хвилі напружень з максимумом на глибині $\xi \approx 0.2 \div 1$.

Рисунок 7 показує, яку частку прикладеної сили сприймає включення (24). У квазістатичному режимі ($\Omega \rightarrow 0$) включення сприймає близько 80% сили для зосередженого навантаження і близько 87% для розподіленого. Для зосередженої сили ця частка слабо залежить від частоти і зростає до ≈ 1.1 при $\Omega \rightarrow 20$ за рахунок інерційних ефектів. Для розподіленого тиску ця частка різко спадає з частотою і має мінімум при $\Omega \approx 5.8; 11.7; 17.5$. Ці значення відповідають умові $k_R(b-a) = 2\pi n$, тобто на ширині навантаженої ділянки вкладається ціле число довжин хвиль Релея. Отже, розподілене навантаження ефективно фільтрує частоти, на яких воно передає зусилля на включення.

На рис. 8 показано фактичне положення грані $w(\rho, 0, t) = |W| \cos(\omega t - \varphi)$ для зосередженої сили при $\Omega = 5$ у три моменти часу. Прогин спрямовано вглиб півпростору, а сила q діє при $\rho = b/a = 2$. Зовні від лінії навантаження форми грані з часом зсуваються праворуч: від навантаження поширюється хвиля Релея з довжиною $2\pi a / (1.072\Omega)$, а обвідна $\pm |W|$ майже стала. Між включенням і лінією навантаження хвиля відбивається від включення. Утворюється стояча хвиля: обвідна має вузли, а точка $\rho = 1$ залишається нерухомою.

Жорстке включення, зчеплене з півпростором, працює як анкер: у квазістатичі воно сприймає $80 \div 87$ % прикладеної сили і в кілька разів зменшує осідання грані поблизу себе. Водночас біля кутової точки (виходу включення на грань) виникає напруження, яке може бути джерелом руйнування зчеплення. Особливо небезпечним є навантаження, прикладене впритул до включення. На високих частотах включення відбиває поверхневі хвилі Релея і стає вторинним джерелом хвиль, а частка зусилля, що передається на включення від розподіленого навантаження, різко залежить від співвідношення ширини навантаженої ділянки та довжини хвилі Релея.

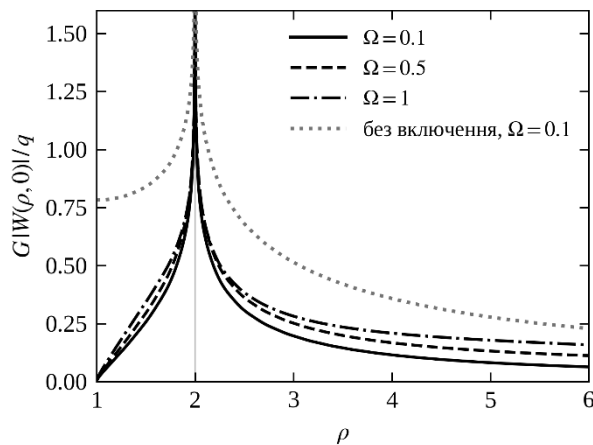


Рис. 1. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, зосереджена по колу сила; пунктир – півпростір без включення, $\Omega = 0.1$

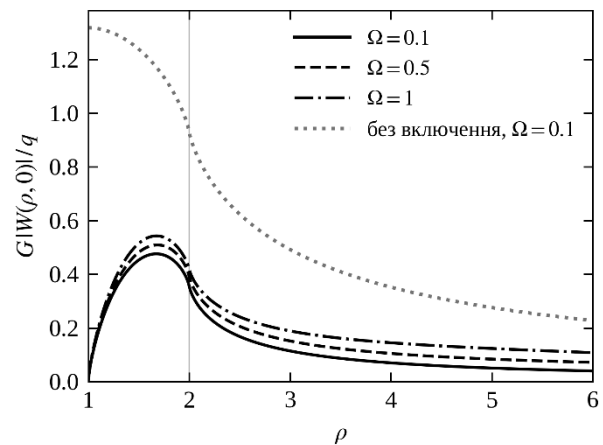


Рис. 2. $|W(\rho, 0)|$ для рівномірного тиску на кільцевій ділянці $a < r < b$

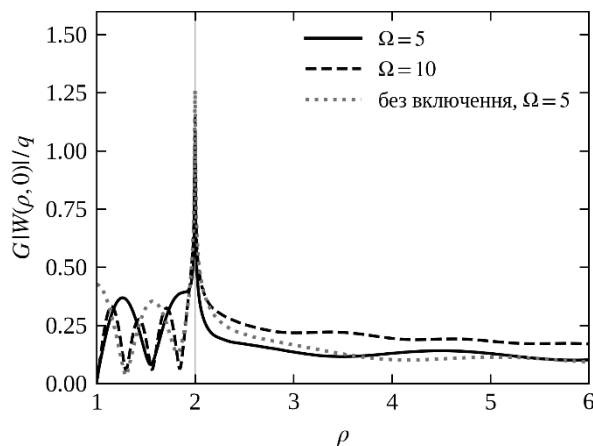


Рис. 3. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, зосереджена по колу сила; пунктир – без включення, $\Omega = 5$

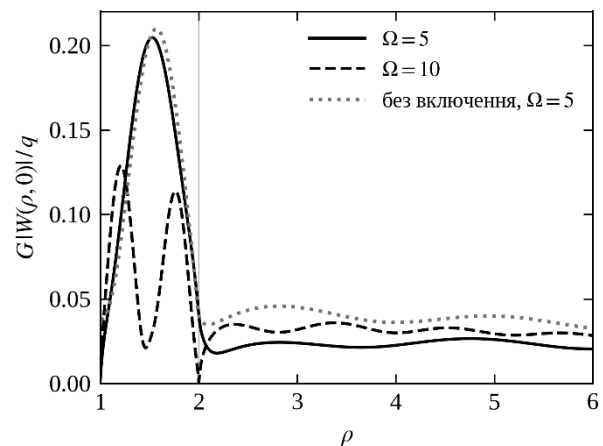


Рис. 4. Амплітуда прогину грані $|W(\rho, 0)|$, рівномірний тиск на кільцевій ділянці $a < r < b$

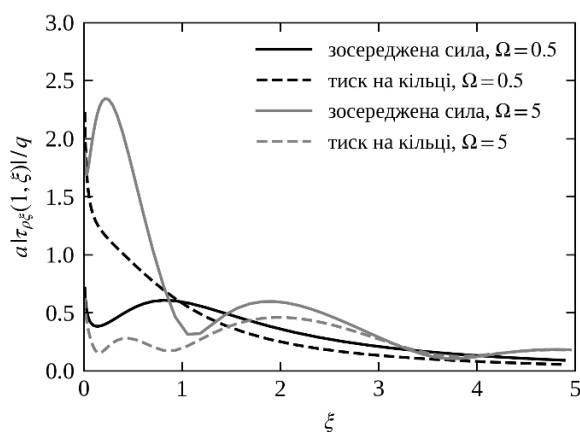


Рис. 5. Амплітуда дотичного напруження $|\tau_{\rho\xi}(1, \xi)|$ на поверхні включення

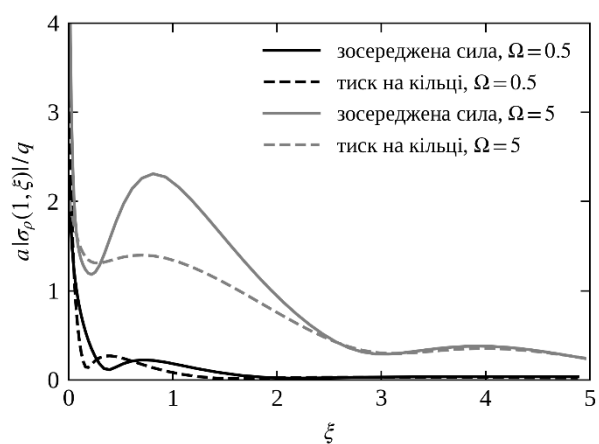


Рис. 6. Амплітуда нормального напруження $|\sigma_{\rho}(1, \xi)|$ на поверхні включення

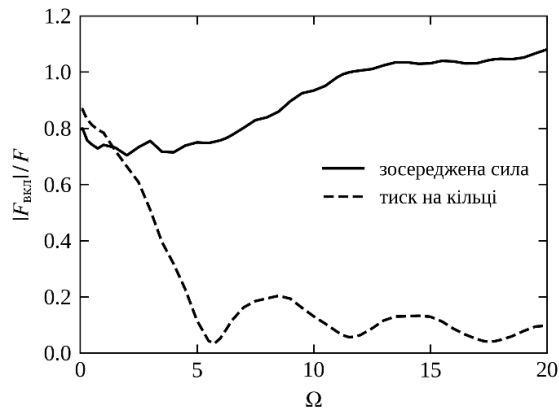


Рис. 7. Частка сумарної сили, що передається на включення $|F_{\text{вкл}}|/F$ залежно від безрозмірної частоти Ω

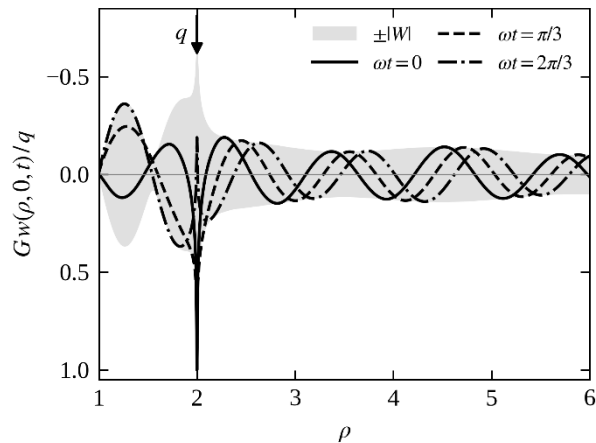


Рис. 8. Форма грані $w(\rho, 0, t) = \text{Re}[W(\rho, 0)e^{-i\omega t}]$ у різні моменти часу; зосереджена сила; $\Omega = 5$; сіра область – обвідна $\pm|W(\rho, 0)|$; вісь прогину спрямована вниз (вглиб півпростору)

6 ВИСНОВКИ

1. Побудовано наближений аналітико-чисельний розв'язок задачі про усталені коливання пружного півпростору з наскрізним вертикальним циліндричним жорстким включенням, поверхня якого жорстко зчеплена з півпростором.

2. Застосовано інтегральне перетворення Вебера безпосередньо до рівнянь руху та крайових умов і зведено задачу до неоднорідної векторної одновимірної крайової задачі відносно трансформант переміщень. Її розв'язок побудовано методом матричного диференціального числення.

3. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння на проміжку $\xi \in [0, \infty]$ відносно невідомої функції, що має механічний зміст дотичного напруження на поверхні включення. Визначено характер особливості цієї функції в кутовій точці $\xi = 0$. Рівняння розв'язано наближено методом колокацій з чисельним інтегруванням уздовж контуру, що обходить точки розгалуження і полюс Релея відповідно до умов випромінювання.

4. Досліджено амплітуди коливань плоскої грані півпростору, а також дотичне і нормальне напруження на циліндричній поверхні включення. Розглянуто два види нормального навантаження на грані, зосереджене по колу і рівномірно розподілене на прилеглий до включення кільцевій ділянці, в широкому діапазоні безрозмірної частоти коливань.

5. Для півпростору без включення розв'язок збігається з розв'язком задачі Лемба, а при $\Omega \rightarrow 0$ переходить у розв'язок статичної задачі Буссінеска.

6. Жорстке включення істотно зменшує прогин грані: у квазістатичному режимі на відстані шести радіусів включення прогин приблизно в 3.5 раза менший, ніж у півпросторі без включення. Включення сприймає близько 80% прикладеної сили при навантаженні, зосередженому по колу, і близько 87% при розподіленому навантаженні.

7. У височастотному діапазоні між включенням і лінією навантаження утворюються стоячі хвилі Релея, а саме включення стає вторинним джерелом поверхневих хвиль. Розподілене навантаження збуджує за межами навантаженої ділянки значно слабші хвилі, ніж зосереджене з тією самою сумарною силою: при $\Omega = 5$ приблизно в 5 разів.

8. Напруження на поверхні включення мають інтегровану особливість у кутовій точці і згасають з глибиною. На низьких частотах навантаження, прикладене впритул

до включення, дає приблизно втричі більшу концентрацію дотичного напруження біля кутової точки, ніж зосереджене по колу. Цю концентрацію слід враховувати як можливе джерело руйнування зчеплення.

9. Частка сили, що передається на включення від зосередженого навантаження, слабо залежить від частоти. Від розподіленого навантаження вона різко спадає зі зростанням частоти і має мінімуми при $k_R(b-a) = 2\pi n$, тобто коли на ширині навантаженої ділянки вкладається ціле число довжин хвиль Релея. Отже, розподілене навантаження зумовлює виражену частотну залежність передачі зусилля на включення.

Запропонований підхід можна застосувати під час розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на поверхні включення.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Пауан, 1999. 133 с.
2. Babych S., Yaretskaya N., Dehtyar S. Contact Problem for Half-Spaces and Elastic Cylinder with Initial (Residual) Stresses. *Int. Applied Mechanics*. 2023. 59. P. 1-13.
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01234-w>
3. Zhupanska O.I., Ulitko A.F. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *J. of the Mech. and Physics of Solids*. 2005. 53(5). P. 975-999.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.002>
4. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a halfspace with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. of Enterprise Technologies*. 2018. 4(7). P. 43-50.
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
5. Yang Z., Jiang G., Tang H., Sun B., Yang Y. Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. 24(1). <https://doi.org/10.1177/1081286517739520>
6. Zhao M., van Dalen K.N., Barbosa J.M., Metrikine A.V. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space. *Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics*. 2017. P. 369–388.
https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0_35
7. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
8. Kit H.S., Mykhas'kiv V.V., Khaj O.M. Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method. *J. Appl. Math. Mech.* 2002. 66(5). P. 817-824. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2)
9. Coşkun İ., Engin H., Özmütlu A. Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity. *Shock and Vibration*. 2011. 18(6), P. 827-838.
<https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0602>
10. Eskandari-Ghadi M., Mahmoodian M. Analytical Solution of Time-Harmonic Torsional Vibration of a Cylindrical Cavity in a Half-Space. *World Academy of Science, Engineering and Technology Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2012. 6 (1). P. 184-189.
<https://doi.org/10.5281/ZENODO.1061873>

11. Selvadurai A.P.S., Rajapakses R.K.N.D. On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. *Int. J. Solids Structures*. 1985. 21(12). P. 1213-1229.
<https://www.mcgill.ca/civil/files/civil/102.pdf>
12. Малиц П.Я., Приварников А. К. Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием. *Вопросы прочности и пластичности: Сб. науч. тр. Днепропетровск: Бюллетень изобретений*. 1971. С. 15-18.
13. Popov G.Ya., Vaisfel'd N.D. Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight. *Int. Appl. Mech.* 2014. 50(6). P. 627-636. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>
14. Popov G.Ya., Protserov Yu.S. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.* 2016. 212(1). P. 67-82.
<https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>
15. Fesenko A.A., Moysenok A.P. Exact Solution of a Nonstationary Problem for the Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 2020. 249. P. 478-495.
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
16. Fesenko A.A. Dynamic Problem for an Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 2025. 294, 326-354. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08105-4>
17. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series, and Products* / ed. by D. Zwillinger, V. Moll. 8th ed. Amsterdam : Elsevier, 2014. 1184 p. DOI: 10.1016/C2010-0-64839-5
18. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М: Наука, 1982. 342 с.
19. Лурье А.И. *Пространственные задачи теории упругости*. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.

References

1. Popov, G.Ya., Abdymanapov, S.A., Efimov, V.V. (1999). *Funktsii i matritsy Grina odnomernykh kraevykh zadach*. [Functions and Green matrices of one-dimensional boundary value problems] (monograph). Almaty: Rauan. [in Russian]
2. Babych, S., Yaretskaya, N., Dehtyar, S. (2023). Contact Problem for Half-Spaces and Elastic Cylinder with Initial (Residual) Stresses. *Int. Applied Mechanics*. 59. 1-13.
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01234-w>
3. Zhupanska, O.I., Ulitko, A.F. (2005). Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *J. of the Mech. and Physics of Solids*. 53(5). 975-999.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.01.002>
4. Protsenko, V., Miroshnikov, V. (2018). Investigating a problem from the theory of elasticity for a halfspace with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. of Enterprise Technologies*. 4(7). 43-50.
<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
5. Yang, Z., Jiang, G., Tang, H., Sun, B., Yang, Y. (2017). Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 24(1). <https://doi.org/10.1177/1081286517739520>
6. Zhao, M., van Dalen, K. N., Barbosa, J. M., Metrikine, A. V. (2017). Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space. *Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics*. 369-388.
https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0_35
7. Grinchenko, V.T., Meleshko, V.V. (1981). *Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh*. [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies] (monograph). Kyiv: Nauk. dumka. [in Russian]
8. Kit, H.S., Mykhas'kiv, V.V., Khaj, O.M. (2002). Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method. *J. Appl. Math. Mech.* 66(5). 817-824. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2)

9. Coşkun, İ., Engin, H., Özmutlu, A. (2011). Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity. *Shock and Vibration*. 18(6). 827-838. <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0602>
10. Eskandari-Ghadi, M., Mahmoodian, M. (2012). Analytical Solution of Time-Harmonic Torsional Vibration of a Cylindrical Cavity in a Half-Space. *World Academy of Science, Engineering and Technology Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 6(1). 184-189. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.1061873>
11. Selvadurai, A. P. S., Rajapakse, R. K. N. D. (1985). On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. *Int. J. Solids Structures*. 21(12). 1213-1229. <https://www.mcgill.ca/civil/files/civil/102.pdf>
12. Malits, P.Ya., Privarnikov, A.K. (1971). Primeneniye preobrazovaniy tipa Vebera k resheniyu zadach teorii uprugosti dlya sloistyx sred s tsilindricheskim otverstiyem. [Application of Weber-type transforms to the solution of elasticity problems for layered media with a cylindrical cavity]. *Voprosy prochnosti i plastichnosti: Sb. nauch. tr. Dnepropetrovsk: Byulleten izobreteniy*. 15–18. [in Russian]
13. Popov, G.Ya., Vaisfel'd, N.D. (2014). Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight. *Int. Appl. Mech.* 50(6). 627-636. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>
14. Popov, G.Ya., Protserov, Yu.S. (2016). Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.* 212(1). 67-82. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>
15. Fesenko, A.A., Moyseenok, A.P. (2020). Exact Solution of a Nonstationary Problem for the Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 249. 478-495. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
16. Fesenko, A.A. (2025). Dynamic Problem for an Elastic Layer with Rigid Cylindrical Inclusion. *J. Math. Sci.* 294. 326-354. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>
17. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (2014). *Table of Integrals, Series, and Products* / ed. by D. Zwillinger, V. Moll. 8th ed. Amsterdam: Elsevier.
18. Popov, G.Ya. (1982). *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniye i podkrepleniye*. [Concentration of elastic stresses near punches, cuts, thin inclusions and reinforcements] (monograph). M: Nauka. [in Russian]
19. Lurye, A.I. (1955). *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti*. [Three-dimensional problems of the theory of elasticity] (monograph). Moscow: GITTL. [in Russian]

Фесенко Ганна Олександрівна

к.ф.-м. н., доцент

fesenko@onu.edu.ua

[ORCID: 0009-0007-1469-9165](https://orcid.org/0009-0007-1469-9165)

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
вул. Змієнка Всеволода, 2, Одеса, Україна 650001

Стаття надійшла до редакції 10.07.2026

Стаття прийнята до друку 10.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

Для посилань:

Фесенко Г.О. Усталені коливання пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням.

Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 2. С. 95-116.

For references:

A. Fesenko (2026). Steady-state oscillations of an elastic half-space with a rigid cylindrical inclusion. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 95–116.

[Усталені коливання пружного півпростору з циліндричним жорстким включенням](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-95-116) © 2026 by
[Фесенко Г.О.](https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-2-95-116) is licensed under CC BY 4.

УДК 514.7

ON THE NUMBER OF INDEPENDENT COMPONENTS OF A SKEW-SYMMETRIC TENSOR

A. Soloviov¹

¹*Odesa I.I. Mechnikov National University*

Abstract: This paper investigates a relevant problem in modern differential geometry concerning the exact estimation of the number of independent and dependent components of a twice-covariant tensor. The study is conducted within the framework of a multidimensional pseudo-Riemannian space of dimension four or higher, endowed with a given non-degenerate metric tensor. Primary attention is given to the detailed analysis of the properties of a skew-symmetric tensor satisfying a specific tensor equation that involves an affinor. This affinor is functionally independent of the tensor under consideration, yet it satisfies a strict skew-symmetry condition with respect to the underlying metric of the space.

To rigorously prove the key mathematical propositions, a method of linear non-degenerate coordinate transformation at a fixed point of the manifold is applied, allowing the affinor in question to be algebraically reduced to its Jordan canonical form. The paper provides a rigorous proof of a lemma establishing the explicit analytical expression of certain components of the skew-symmetric tensor in terms of its other components and the entries of the affinor, provided that the sum of the corresponding eigenvalues of the affinor matrix is non-zero.

Furthermore, the calculations reveal a significant structural constraint: if the number of dependent tensor components does not exceed a specific threshold value, which is linearly dependent on the total dimension of the space, then at most two eigenvalues in the spectrum of the affinor matrix can be non-zero.

As the main theoretical result, a theorem is proven stating that if the rank of the affinor matrix exceeds two, the total number of dependent components of the tensor is guaranteed to be no less than the aforementioned threshold value. Additionally, the article considers a specific geometric case where the given affinor is constructed directly from the components of a non-zero Riemann curvature tensor using two linearly independent vector fields.

The obtained mathematical results and established regularities may be beneficial for future research in differential geometry, general relativity, and theoretical mechanics, particularly in the complex modeling of multidimensional physical processes.

Keywords: pseudo-Riemannian spaces; affinor structure; Jordan canonical form; skew-symmetric tensor; affinor-semisymmetric spaces.

ПРО КІЛЬКІСТЬ НЕЗАЛЕЖНИХ КОМПОНЕНТ КОСОСИМЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА

Соловйов А.¹

¹*Одеський національний університет імені І.І. Мечникова*

Анотація: У представлений науковій статті досліджуються актуальна проблема сучасної диференціальної геометрії, яка пов'язана з точною оцінкою кількості незалежних та залежних компонент двічі коваріантного тензора. Дослідження проводиться для багатовимірного псевдоріманового простору, де розмірність многовиду становить чотири або більше, із задалегідь заданим не виродженим метричним тензором. Головна увага приділена детальному вивченню властивостей кососиметричного тензора, що задовольняє спеціальному тензорному рівнянню за участі афінора. Цей афінор є функціонально незалежним від самого досліджуваного тензора, проте відповідає строгій умові косої симетрії відносно базової метрики даного простору.

Для послідовного доведення ключових математичних тверджень успішно застосовується метод лінійного невиродженого перетворення локальних координат у спеціально обраній фіксованій точці многовиду, завдяки чому досліджуваний афінор алгебраїчно приводиться до своєї канонічної форми Жордана. У роботі строго доведено лему про принципову можливість явного аналітичного вираження одних компонент кососиметричного тензора через інші його компоненти та елементи афінора за умови, що сума відповідних власних чисел матриці цього афінора не дорівнює нулю.

Крім того, в результаті обчислень встановлено важливе структурне обмеження: якщо кількість залежних компонент тензора не перевищує спеціально визначеного порогового значення, яке знаходиться в прямій лінійній залежності від загальної розмірності простору, то серед усього спектру власних чисел матриці афінора не більше двох можуть бути відмінними від нуля.

Як основний фундаментальний теоретичний результат доведено теорему про те, що у випадку, коли ранг матриці афінора перевищує два, загальна кількість залежних компонент тензора гарантовано є не меншою за вказане порогове значення. Також у статті окремо розглядається специфічний геометричний випадок, коли зазначений афінор конструюється безпосередньо з компонент ненульового тензора кривини Рімана за допомогою використання двох лінійно незалежних векторних полів.

Отримані математичні результати та виведені закономірності можуть бути корисними для подальших перспективних досліджень у галузі диференціальної геометрії, загальної теорії відносності та теоретичної механіки при комплексному моделюванні багатовимірних фізичних процесів.

Ключові слова: псевдоріманові простори; афінорна структура; канонічна форма Жордана; кососиметричний тензор; афінор-напівсиметричні простори.

1 INTRODUCTION

Consider C_n a complex-analytic manifold [1] of dimension n . Let $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\bar{\alpha}}$ be local complex coordinates, where $\alpha = 1, 2, \dots, n$, and $\bar{\alpha} = n+1, n+2, \dots, 2n$. The numbers x^α and $x^{\bar{\alpha}}$ will be considered as local coordinates of a real even-dimensional analytic manifold M_{2n} .

If R_z – the tangent space to the manifold C_n at the point z [2], T_x – the tangent space to M_{2n} at the point x . The linear transformation F is defined on M_{2n} by a tensor (affinor) field with local components F_j^i . In general, spaces in which an affinor field satisfying certain conditions is defined are called spaces with an affinor structure, and the affinor itself, which is subjected to the conditions, is called a structural affinor [3]. In the given space M_{2n} , this field (or affinor) satisfies the condition

$$F_\alpha^i F_j^\alpha = -\delta_j^i, \\ (i, j, \alpha = 1, 2, \dots, 2n),$$

where δ_i^h – Kronecker deltas, which are defined by the following conditions

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases}.$$

The tensor field F_j^i – is called an almost complex structure on M_{2n} generated by a complex analytic structure on C_n .

More general cases are also considered in the literature. Thus, for example, a structure F_j^i such that $F_\alpha^h F_j^\alpha = e\delta_i^h$ is called an *e-structure* of *elliptic type* for $e = -1$, of *parabolic type* for $e = 0$, a structure of *hyperbolic type* – for $e = 1$.

If a tensor F is given in the tangent space T_x to the manifold, then the complex extension of this space T_x^c decomposes into a direct sum of subspaces S_n^c and $\bar{S}_n^c$ – linear spans of eigenvectors belonging to the eigenvalues i and $-i$, respectively. Such a decomposition of T^c into a direct sum is sometimes used to define spaces with an almost complex structure [4].

An almost complex structure determines on the manifold fields of two-dimensional directions called two-dimensional analytic directions or characteristic planes. A two-dimensional analytic direction in T_x passing through a vector v is called the linear span of the vectors v and Fv . On a characteristic plane, an almost complex structure determines an orientation, an angular metric, and a relation of equality of vector lengths. A system of oriented characteristic planes determines an almost complex structure.

An almost complex structure does not exist on every even-dimensional orientable manifold of class C^∞ . An example of such a manifold that does not admit an almost complex structure is the four-dimensional and eight-dimensional spheres. For an almost complex structure to exist on a manifold, it is necessary and sufficient that there exists on it an exterior differential form of the second order ω such that $\Lambda^n \omega \neq 0$ or, in other words, the rank of the matrix of local components of the form ω is equal to $2n$. On the other hand, the presence of an almost complex structure on a manifold is not yet sufficient to allow the introduction of the structure of a complex-analytic manifold on it.

An almost Hermitian structure is defined on a manifold with an almost complex structure by specifying a metric tensor that satisfies the condition

$$g_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta = g_{ij}. \quad (1)$$

This condition expresses the fact that the inner product of vectors remains invariant under the transformation F . An almost Hermitian structure can be introduced on any space with an almost complex structure. The tensor $F_{ij} = g_{ik}F_j^k$ defines an exterior differential 2-form F of rank $2n$ on the manifold as a whole. An almost Hermitian structure can be defined on a Riemannian manifold by specifying an exterior differential 2-form of rank $2n$ that satisfies the condition (1).

By imposing algebraic or differential conditions on a Hermitian structure, special types of spaces are obtained. One of the well-known types of spaces is Kähler spaces, in which the almost Hermitian structure is covariantly constant (or absolutely parallel) with respect to the connection of the space M_{2n} , that is, $F_{ij,k} = 0$.

A direct generalization of Kähler spaces is affino-semisymmetric spaces.

Definition. A space V_n is called *affino-semisymmetric* if a semisymmetric affino structure $F_i^h(x)$ is defined in it, that is, the affino $F_i^h(x)$ satisfies the conditions $F_{ij,[kl]} = 0$.

Here the index is lowered using the metric tensor $F_{ij} = g_{i\alpha}F_j^\alpha$. The structure of such a space will be called *F-semisymmetric*.

Intrinsic objects of the space V_n in which an affino structure is defined include objects determined from the metric tensor g_{ij} and the structural affino F_i^h .

2 ANALYSIS OF LITERATURE AND PROBLEM STATEMENT

The specialization of pseudo-Riemannian spaces, as a means of introducing additional constraints, has two main sources. The first is the imposition of geometric conditions on the object under study and the utilization of geometric features in the investigation. The second consists of technological capabilities that arise when using developed research methods. Taking both features into account, methods for studying tensor fields that satisfy special relations with affino structures have been proposed.

Among pseudo-Riemannian spaces that admit the existence of additional structures, affino-semisymmetric spaces are highlighted, where the affino is constructed directly from the Riemann tensor. Their algebraic features are studied, and based on this, the number of independent components of intrinsic tensor objects is evaluated.

Spaces of dimension $n \geq 4$ have their own peculiarities both in research methods and in the obtained results. Technical difficulties that arise in the process of studying systems of differential and tensor equations have a specific character, while the methods for overcoming them by reducing the affino to the Jordan canonical form the basis of local analysis. Therefore, the study of dependencies between the components of twice-covariant tensors is a relevant topic of research. The work is carried out locally, using tensor methods.

3 AIM AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The study of algebraic and tensor relations is one of the effective methods for studying intrinsic geometry in differential geometry. In our case, this provides an opportunity to evaluate the number of independent and dependent components of a twice-covariant skew-symmetric tensor in a pseudo-Riemannian space by reducing an independent affino to a special form – the Jordan canonical form in some coordinate system.

The aim of the work is to establish an exact criterion for the dependence of the components of a skew-symmetric tensor on its other components and elements of the affino, as well as to determine the relationship between the rank of the affino matrix and the minimum number of dependent components for space dimension $n \geq 4$. A separate task is to apply the obtained results to affino-semisymmetric spaces, where the affino structure is

directly generated by the Riemann tensor, which is important for broad classes of pseudo-Riemannian spaces from general relativity, theoretical mechanics, as well as other branches of differential geometry and topology.

4 RESEARCH RESULTS

Consider a pseudo-Riemannian space V_n [5] with a metric tensor $g_{ij}(x)$ in which a twice-covariant skew-symmetric tensor F_{ij} ($F_{ij} = -F_{ji}$) is defined.

Let us estimate the number of independent components [6] of the tensor F_{ij} satisfying the equation: $F_{\alpha j} K_{\cdot i}^{\alpha} + F_{i\alpha} K_{\cdot j}^{\alpha} = 0$.

Here K_j^h is an affinor independent of F_{ij} . Additionally, we assume that it satisfies the skew-symmetry condition [4] with respect to the metric: $g_{\alpha i} K_j^{\alpha} + g_{\alpha j} K_i^{\alpha} = 0$.

Consider a linear non-degenerate coordinate transformation at some fixed point $M(x^h) \in V_n$: $y^h = A_{\alpha}^h x^{\alpha}$, where $\det \|A_i^h\| \neq 0$.

The tensors F_{ij} and K_h^i transform according to the law [6, 7]:

$$F'_{ij} = F_{\alpha\beta} B_i^{\alpha} B_j^{\beta}, \quad K_i'^h = K_{\beta}^{\alpha} B_i^{\beta} A_{\alpha}^h, \quad \text{here } \|B_i^h\| = \|A_i^h\|^{-1}.$$

Obviously, the rank of the tensor K_i^h , as well as the number of dependent components of the tensor F_{ij} in our equation, are invariant with respect to coordinate transformations. The latter remains true even when $\|A_i^h\|$ is a complex-valued non-degenerate matrix.

For further investigation, we reduce the affinor K_i^h using a non-degenerate transformation (the case of a complex transformation is not excluded) to the Jordan canonical form. In our study, we restrict ourselves to a simplified notation of this matrix:

$$K_j^i = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & K_2^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}.$$

The latter can be written as follows: $K_{\alpha}^{\alpha} = \omega_{\alpha}$, $K_{\alpha}^{\alpha+1} = 0, 1$, $K_b^a = 0$ for $b \neq a, a+1$. In this formula, as throughout the paper, summation is not implied over repeated indices.

Naturally, in the general case, the eigenvalues ω_{α} of the matrix K_i^h can be complex. The coordinate system y in which K_i^h has the Jordan form will be called canonical.

The equation of the original system with fixed indices i and j will be denoted by θ_{ij} . Since the equation θ_{ji} coincides up to a sign with the equation θ_{ij} (due to the property $F_{ij} = -F_{ji}$), our system is equivalent to the system of equations for indices $i < j$. Diagonal equations θ_{ii} hold identically.

The equations in the canonical coordinate system y have the following form:

$$\theta_{ij} (i < j < n): \quad F_{ij}(\omega_i + \omega_j) + F_{i+1,j} K_i^{i+1} + F_{i,j+1} K_j^{j+1} = 0;$$

$$\theta_{in} (i < n): \quad F_{in}(\omega_i + \omega_n) + F_{i+1,n} K_i^{i+1} = 0.$$

Recall that the Einstein summation convention does not apply to these equations. We prove the following lemma:

Lemma 1.

The components of the skew-symmetric tensor F_{ij} (where $i < j$) for which $(\omega_i + \omega_j) \neq 0$ depend on the other components of the tensor F_{ij} and the affnor K_j^i .

Proof. Let I denote the set of ordered pairs of indices (i, j) , where $i < j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Let I_1 and I^* denote subsets such that:

$$(i, j) \in I_1 \Leftrightarrow (\omega_i + \omega_j) \neq 0 \quad \text{and} \quad I^* = I_1.$$

Let q denote the number of elements in I_1 . Below we will prove that q components F_{ij} , where $(i, j) \in I_1$, are explicitly expressed in terms of other components of the tensor F_{ij} and the affnor K_j^h .

Step 1. From the set of pairs I_1 , select a pair (i_1, j_1) such that the indices i_1 and j_1 are "maximal", that is:

$$j_1 = \max_{\forall (i, j) \in I_1} j \quad \text{and} \quad i_1 = \max_{\forall (i, j_1) \in I_1} i.$$

By analyzing the equation $\theta_{i_1 j_1}$, one can explicitly express the component $F_{i_1 j_1}$ in terms of the components $F_{ij} \in I^*$ and K_i^h . This follows from the fact that the indices in the terms F_{i_1+1, j_1} and F_{i_1, j_1+1} are strictly larger; therefore, these components are either identically zero or already belong to the set I^* .

Step 2. Next, let us denote $I_2 = I_1 \setminus \{(i_1, j_1)\}$. Similarly, from the set of pairs I_2 , we select a "maximal" pair (i_2, j_2) :

$$j_2 = \max_{\forall (i, j) \in I_2} j \quad \text{and} \quad i_2 = \max_{\forall (i, j_2) \in I_2} i.$$

Then, by analogy with the previous step, it is easy to see that by analyzing the equation $\theta_{i_2 j_2}$, one can explicitly express the component $F_{i_2 j_2}$ in terms of the component $F_{i_1 j_1}$ and the components F_{ij} for $(i, j) \in I^*$ and K_i^h . But then, based on Step 1, it follows that $F_{i_2 j_2}$ is also expressed explicitly only in terms of the components from I^* and K_i^h .

We continue this process similarly. After q steps, we make sure that all components F_{ij} for which $(i, j) \in I_1$ are explicitly expressed only through the components F_{ij} for $(i, j) \in I^*$ and the affnor K_i^h .

The lemma is proved.

Based on Lemma 1, we can formulate and prove the following lemma. Let r^* be a number equal to $2n - 5$ for pseudo-Riemannian spaces V_n with $n \geq 4$.

Lemma 2.

If the number of dependent components of the tensor F_{ij} does not exceed the number $r^* = 2n - 5$, then among the numbers ω_i there are no more than two non-zero ones.

Proof. We carry out the proof by contradiction. Assume that there are at least three non-zero eigenvalues $\omega_a, \omega_b, \omega_c$. Since the indices can be renumbered, we will assume that $a=1, b=2, c=3$.

Let us show that under this assumption at least $2n - 5$ components of the tensor F_{ij} depend on other components of this tensor and the affnor K_i^h . Taking into account Lemma 1, for this it is sufficient to show that among the elements $\omega_i + \omega_j$ (where $i < j$) there are at least r^* non-zero ones.

1. First, consider the case where the non-zero eigenvalues satisfy the condition:

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \neq |\omega_3|.$$

Then it is obvious that among the first three indices, three sums are non-zero:

$$\omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 + \omega_3, \quad \omega_2 + \omega_3.$$

For any other index $a > 3$:

- **if $\omega_a = 0$, then $\omega_1 + \omega_a$, $\omega_2 + \omega_a$, $\omega_3 + \omega_a$, are non-zero (3 pairs);**
- **if $\omega_a = \pm\omega_1$, then at least $\omega_2 + \omega_a$ and $\omega_3 + \omega_a$, are non-zero (2 pairs);**
- **if $\omega_a = \pm\omega_2$ or $\pm\omega_3$, we similarly have at least 2 non-zero pairs.**

Hence, based on Lemma 1, it follows that among the components of F_{ij} there are at least $3 + 2(n-3) = 2n-3$ dependent ones, which contradicts the condition $r^* \leq 2n-5$.

2. Consider the case where the eigenvalues satisfy the condition:

$$\omega_1 = -\omega_2, \quad \omega_3 \neq \pm\omega_1,$$

and for $\forall a > 3$: $\omega_a = \pm\omega_1, \pm\omega_3, 0$. (Other values reduce to the previous case).

Among the first three indices, two sums are non-zero: $\omega_1 + \omega_3$ and $\omega_2 + \omega_3$.

For $a > 3$:

- **if $\omega_a = 0$, we have 3 non-zero sums;**
- **if $\omega_a = \omega_1$, $\omega_1 + \omega_a = 2\omega_1$ and $\omega_3 + \omega_a$ are non-zero (2 pairs);**
- **if $\omega_a = -\omega_1$, $\omega_2 + \omega_a = -2\omega_1$ and $\omega_3 + \omega_a$ are non-zero (2 pairs).**

Thus, the number of dependent components is not less than $2 + 2(n-3) = 2n-4 > 2n-5$. Again, a contradiction.

3. If $\omega_1 = \omega_2$ and $\omega_3 \neq \pm\omega_1$.

Here, among the first three we have $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1 \neq 0$, $\omega_1 + \omega_3 \neq 0$, $\omega_2 + \omega_3 \neq 0$ (3 pairs). Together with at least 2 pairs for each $a > 3$, we obtain $3 + 2(n-3) = 2n-3$ dependent components.

4. Obviously, it remains to consider the case where:

$$\omega_1 = \dots = \omega_k = -\omega_{k+1} = \dots = -\omega_{k+l} \neq 0, \quad \omega_{k+l+1} = \dots = \omega_n = 0.$$

The number of non-zero sums $\omega_i + \omega_j$ ($i < j$) in this case is equal to:

$$S = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} + (k+l)(n-k-l).$$

Since by assumption $k+1 \geq 3$, the minimum value of S is reached, for example, at $k = 2$, $l = 1$. Then $S = 1 + 0 + 3(n-3) = 3n-8$. It is easy to verify that for $n \geq 4$, $3n-8 \geq 2n-5$ holds.

As a result, we have considered all possible combinations of eigenvalues and obtained a contradiction.

Lemma 2 is proved.

Based on the previous lemmas, we prove

Theorem.

If the rank of the matrix $\|K_j^i\|$ is greater than two, then among the components of the tensor F_{ij} at least r^* depend on other components of the tensor F_{ij} and the affinor K_j^i .

Proof. It is sufficient for us to show that if the number of dependent components of the tensor F_{ij} is less than or equal to $2n - 5$, then the matrix of the tensor K_j^i has no more than two linearly independent rows.

We carry out the proof by contradiction. In the following, we assume that in the matrix K_j^i reduced to the Jordan form, there are at least three non-zero rows.

Taking into account Lemma 2 (no more than two non-zero diagonal elements) and the possibility of permuting Jordan blocks, it is sufficient to consider the following cases for the structure of the super diagonal elements $K_j^{i+1} = \varepsilon_j$:

Case 1. $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_a = 0$, for $a = \overline{3, n}$, and $K_3^4 = 1$.

It is obvious that the numbers $\omega_1 + \omega_a$ and $\omega_2 + \omega_a$ ($\forall a \geq 3$) are non-zero. By Lemma 1, the components F_{1a} ($a \geq 3$) and F_{2a} ($a \geq 3$) depend on other components.

The number of these dependent components is $2(n-2) = 2n - 4$. Since $2n - 4 > 2n - 5$, we have a contradiction.

Case 2. $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$ for $a = \overline{2, n}$ and $K_2^3 = K_3^4 = 1$.

Since $\omega_1 + \omega_a \neq 0$ ($a = \overline{2, n}$), by Lemma 1 the components F_{1a} ($n - 1$ of them) are expressed in terms of the others.

From the equation θ_{in} for $i = 2, 3$ it follows that $F_{3n} = F_{4n} = 0$.

The formula θ_{ij} for $i = 2, j = s$ ($s = \overline{3, n-1}$) yields: $F_{3s} = -F_{2, s+1} K_s^{s+1}$.

Thus, additionally F_{3a} ($a = 4, 5, \dots, n$) depend on other components ($n - 3$ components in total).

The total number of dependent components is: $(n-1) + (n-3) = 2n - 4 \geq 2n - 5$. Again, a contradiction.

Case 3. $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$ for $a = \overline{2, n}$, $K_2^3 = 1, K_3^4 = 0, K_4^5 = 1$.

Similarly to the second case, F_{1a} ($n-1$ of them) are expressed in terms of the others.

The equation θ_{2s} gives a dependence for F_{3a} , and the equation θ_{4s} — for F_{5a} . After careful counting, we see that the number of dependent components strictly exceeds $2n - 5$.

Other cases. (All $\omega_a = 0$, but there are chains of ones, for example $K_1^2 = K_2^3 = K_3^4 = 1$).

In these cases, the system θ_{ij} reduces to $F_{i+1, j} \varepsilon_i + F_{i, j+1} \varepsilon_j = 0$.

Analysis of these recurrence relations leads to the fact that the number of zero and linearly dependent diagonals of the matrix F_{ij} generates at least $2n - 5$ dependent components.

Thus, in all possible cases we have obtained a contradiction. Consequently, the assumption about the existence of three linearly independent rows was false. The theorem is proved.

Let an affinor-semisymmetric structure be defined in the space, that is, a structure for which $F_{ij, [kl]} = 0$, holds, or, taking into account the integrability conditions of F_{ij} ,

$$F_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha} = 0.$$

In a non-trivial case, the Riemann tensor R_{ijk}^h [8] of this space is not identically zero; therefore, there exist two vector fields μ^i, ν^i [9] such that $R_{i\alpha\beta}^h \mu^{\alpha} \nu^{\beta} \neq 0$.

We introduce the notation: let

$$K_{.i}^h \stackrel{\text{def}}{=} R_{i\alpha\beta}^h \mu^{\alpha} \nu^{\beta}. \quad (2)$$

Thus, we obtain K_j^h – an affinor independent of F_{ij} , constructed from the Riemann tensor. Obviously, it satisfies the skew-symmetry condition with respect to the metric [10]:

$$g_{\alpha i} K_j^\alpha + g_{\alpha j} K_i^\alpha = 0,$$

and therefore, for these spaces the following holds:

Corollary 1.

In affinor-semisymmetric spaces, if the rank of the matrix $\|K_j^i\|$ is greater than two, then among the components of the tensor F_{ij} at least r^* depend on other components of the tensor F_{ij} and the affinor K_j^i .

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

To verify and illustrate the results obtained in Lemma 1, Lemma 2, Theorem, and Corollary 1, let us consider a specific example of a four-dimensional ($n = 4$) non-flat affinor-semisymmetric non-Kähler pseudo-Riemannian space V_4 .

The metric tensor g_{ij} of this space is given in matrix form as:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}.$$

By direct calculation, we find the Christoffel symbols [6, 10] of the second kind, which we represent as matrices with respect to the upper index Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Using the obtained matrices, we compute the components of the Riemann curvature tensor R_{jkl}^i . The only non-zero components (up to skew-symmetry in the last two indices) are:

$$R_{.434}^3 = -1, \quad R_{.334}^4 = 1. \quad (3)$$

Since the Riemann tensor is not identically zero, the space is non-flat.

We specify the structural affinor F_j^i by the matrix:

$$F_{.j}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

It is directly visible that $F^2 = -I$, confirming the presence of an almost complex structure. Lowering the upper index using the metric tensor ($F_{ij} = g_{i\alpha} F_{.j}^{\alpha}$), we obtain the covariant affinor in matrix form:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^1)^2 \\ 0 & 0 & -(x^1)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Since $F_{ij} = -F_{ji}$, the structure is skew-symmetric.

To study the differential properties, we compute the covariant derivative $\nabla_k F_{.j}^i$. Due to the constancy of the matrix (4), we have: $\nabla_k F_{.j}^i = \Gamma_{\alpha k}^i F_{.j}^{\alpha} - \Gamma_{jk}^{\alpha} F_{.\alpha}^i$.

In particular, for the component $\nabla_3 F_{.2}^3$, we obtain:

$$\nabla_3 F_{.2}^3 = \Gamma_{13}^3 F_{.2}^1 - \Gamma_{23}^m F_{.m}^3 = \frac{1}{x^1} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{x^1} \neq 0.$$

Thus, the structure is non-Kähler.

Let us verify the semisymmetry condition, which via the Ricci identity is written as:

$$F_{ij,[kl]} = F_{\alpha j} R_{.ikl}^{\alpha} + F_{i\alpha} R_{.jkl}^{\alpha}. \quad (5)$$

Since the non-zero components of the curvature tensor are determined only by the indices 3 and 4 according to (3), it is sufficient to verify equality (5) for $k = 3, l = 4$. Consider the possible non-zero combinations for the indices i and j :

1) For $i = 3, j = 3$:

$$F_{43} R_{.334}^4 + F_{34} R_{.334}^4 = -(x^1)^2 \cdot 1 + (x^1)^2 \cdot 1 = 0,$$

2) For $i = 4, j = 4$:

$$F_{34} R_{.434}^3 + F_{43} R_{.434}^3 = (x^1)^2 \cdot (-1) + (-(x^1)^2) \cdot (-1) = 0,$$

3) For $i = 3, j = 4$:

$$F_{44} R_{.334}^4 + F_{33} R_{.434}^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

For all other sets of indices, the components of the curvature tensor or the covariant affinor make the corresponding terms zero. Thus, the identity $F_{ij,[kl]} = 0$ holds for the entire space, proving its semisymmetry.

In the space V_4 with the metric tensor g_{ij} , where the only non-zero components of the curvature tensor are $R_{.434}^3 = -1$ and $R_{.334}^4 = 1$, the condition of affinor semisymmetry $F_{ij,[kl]} = 0$ is satisfied. According to formula **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, we construct

an affnor $K_{.i}^h$, independent of F_{ij} , using the Riemann tensor and two orthogonal vector fields μ^α, ν^β : $K_{.i}^h \stackrel{\text{def}}{=} R_{.i\alpha\beta}^h \mu^\alpha \nu^\beta$.

We choose vector fields with non-zero components $\mu^3 = 1$ and $\nu^4 = 1$. Then the non-zero elements of the affnor matrix $\|K_{.j}^i\|$ (where the upper index indicates the row and the lower one the column) will be: $K_{.3}^4 = R_{.334}^4 \mu^3 \nu^4 = 1$, $K_{.4}^3 = R_{.434}^3 \mu^3 \nu^4 = -1$.

The affnor matrix $K_{.j}^i$ takes the form:

$$\|K_{.j}^i\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is obvious that the rank of this matrix is equal to two ($\text{rank}(K) = 2$), and it satisfies the skew-symmetry condition with respect to the metric $g_{\alpha i} K_j^\alpha + g_{\alpha j} K_i^\alpha = 0$.

We find the eigenvalues ω_i of the matrix $\|K_{.j}^i\|$ from the characteristic equation

$$\det(K - \omega I) = 0: \omega^2(\omega^2 + 1) = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = i, \quad \omega_4 = -i.$$

In our case, the threshold value for the number of dependent components for $n = 4$ is $r^* = 2n - 5 = 3$. Since exactly two of the eigenvalues ω_i are non-zero ($\omega_3 = i$ and $\omega_4 = -i$), this is in complete agreement with the statement of Lemma 2 (if the number of dependent components does not exceed r^* , then no more than two eigenvalues are non-zero).

According to Lemma 1, the components of the skew-symmetric tensor F_{ij} (where $i < j$) for which the sum of the corresponding eigenvalues is non-zero ($\omega_i + \omega_j \neq 0$) depend on the other components.

Checking all pairs of indices (a, b) with $a < b$ shows that for the pairs (1, 3) and (2, 3) the sum is $\omega_{1,2} + \omega_3 = i \neq 0$, for the pairs (1, 4) and (2, 4) the sum is $\omega_{1,2} + \omega_4 = -i \neq 0$, whereas for the pairs (1, 2) and (3, 4) the sums are equal to zero.

Substituting the resulting affnor $K_{.j}^i$ into the system of equations θ_{ij} for the skew-symmetric tensor: $F_{\alpha j} K_{.i}^\alpha + F_{i\alpha} K_{.j}^\alpha = 0$.

Expanding this system for all independent pairs $i < j$, we obtain the relations

$$\theta_{13} : F_{14} = 0, \quad \theta_{14} : -F_{13} = 0, \quad \theta_{23} : F_{24} = 0, \quad \theta_{24} : -F_{23} = 0,$$

while the equations θ_{12} and θ_{34} hold identically. The status of all components of the tensor F_{ij} is given in Table 1.

Table 1.

Dependence of the components of the skew-symmetric tensor F_{ij} in the space V_4

Component F_{ij}	Sum of eigenvalues $(\omega_i + \omega_j)$	Component status according to θ_{ij}
F_{12}	0	Independent
F_{13}	$i \neq 0$	Dependent ($F_{13} = 0$)
F_{14}	$-i \neq 0$	Dependent ($F_{14} = 0$)
F_{23}	$i \neq 0$	Dependent ($F_{23} = 0$)

F_{24}	$-i \neq 0$	Dependent ($F_{24} = 0$)
F_{34}	0	Independent

The total number of independent components of an arbitrary skew-symmetric tensor in a four-dimensional space is equal to $n(n-1)/2 = 6$. As can be seen from the analysis, exactly 4 components ($F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}$) are dependent (identically zero), and 2 components (F_{12}, F_{34}) remain independent. Since the resulting number of dependent components (4) satisfies the inequality $4 \geq r^* = 3$, this confirms the lower bound established in Theorem and Corollary 1.

Based on the analysis of the intrinsic geometry and differential properties of the space under consideration, the following statement is proved:

Corollary 2.

In the given four-dimensional non-flat affnor-semisymmetric non-Kähler pseudo-Riemannian space V_4 , the structural affnor K^i_j constructed using the Riemann tensor has rank two and exactly two non-zero imaginary eigenvalues $\pm i$. In this case, the system of equations θ_{ij} has exactly 4 dependent components of the skew-symmetric tensor F_{ij} , which exceeds the threshold value $r^* = 2n-5=3$ and completely agrees with the criteria of Lemmas 1-2 and Theorem.

6 CONCLUSIONS

In this work, we succeeded in investigating the algebraic and differential-geometric properties of twice-covariant tensors in pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \geq 4$. For a skew-symmetric tensor satisfying a special linear equation with an independent affnor, the method of reducing the affnor matrix to the Jordan canonical form was applied. It is proved that the components of the skew-symmetric tensor for which the sum of the corresponding eigenvalues of the affnor is non-zero are explicitly expressed in terms of its other components and the elements of this affnor.

A constraint on the affnor itself was also proved: if the number of dependent components does not exceed the threshold value $r^* = 2n - 5$, then among the eigenvalues of the affnor matrix no more than two are non-zero. As a central result, a theorem is established stating that in the case where the rank of the affnor matrix exceeds two, at least $2n - 5$ components of the skew-symmetric tensor are linearly dependent. The obtained criteria were successfully extended to the class of affnor-semisymmetric spaces, where the structural affnor is constructed directly from the Riemann tensor using two vector fields. A specific example of a four-dimensional non-Kähler space with the specified structure was constructed, to which the results of the research were applied.

The obtained results may find application in further research in the field of differential geometry [11], general relativity, theoretical mechanics, and mathematical modeling of physical phenomena.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to report.

References

1. Kiosak, V., Savchenko, A., & Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>

2. Kiosak, V., Prishlyak, O., & Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>.
3. Kurbatova, I., & Konovenko, N. (2025). On canonical 2F-planar mappings of the first type of pseudo-Riemannian spaces with f-structure. *Proceedings of the International Geometry Center*, 18(2), 220–232. <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3160>.
4. Lesechko, O., & Soloviov, A. (2025). Three-dimensional reducible pseudo-Riemannian spaces. *Mechanics and Mathematical Methods*, VII(2), 116–132. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-2-116-132>.
5. Cocos, M. (2006). A note on symmetric connections. *Journal of Geometry and Physics*, 56(3), 337–343. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2005.02.012>.
6. Kiosak, V. (2012). On the number of solutions to a system of algebraic equations. *Proceedings of the International Geometry Center*, 5(2), 43–52.
7. Schouten, J. A., & Struik, D. J. (1935). *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Groningen, Netherlands: Noordhoff.
8. Tanno, S. (1978). Some differential equations on Riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 30(3), 509–531. <https://doi.org/10.2969/jmsj/03030509>.
9. Kiosak, V., Kusik, L., & Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>.
10. Kiosak, V., Lesechko, O., & Latysh, O. (2022). On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(3–4), 230–238. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
11. Soloviov, A., Shevchenko, T., & Hedulian, S. (2026). Spaces of constant almost holomorphic curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 19(2), Paper 11, 20 pages. <https://doi.org/10.15673/pigc.3270>.

Література

1. Kiosak V., Savchenko A., Makarenko L. Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*. 2022. Vol. 2522. 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>.
2. Kiosak V., Prishlyak O., Lesechko O. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. Vol. 14, No. 4. P. 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>.
3. Kurbatova I., Konovenko N. On canonical 2F-planar mappings of the first type of pseudo-Riemannian spaces with f-structure. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 220–232. <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3160>.
4. Лесечко О. В., Соловійов А. А. Тривимірні звідні псевдоріманові простори. Механіка та математичні методи. 2025. Т. VII, № 2. С. 116–132. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-2-116-132>.
5. Cocos M. A note on symmetric connections. *Journal of Geometry and Physics*. 2006. Vol. 56, No. 3. P. 337–343. <https://doi.org/j.geomphys.2005.02.012>.
6. Кіосак В. А. Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2012. Vol. 5, No. 2. P. 43–52.
7. Schouten J. A., Struik D. J. *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Groningen : Noordhoff, 1935.
8. Tanno S. Some differential equations on Riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*. 1978. Vol. 30, No. 3. P. 509–531. <https://doi.org/10.2969/jmsj/03030509>.
9. Kiosak V., Kusik L., Isaiev V. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. Vol. 15, No. 2. P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>.



10. Kiosak V., Lesechko O., Latysh O. On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. Vol. 15, No. 3–4. P. 230–238.
<https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
11. Soloviov A., Shevchenko T., Hedulian S. Spaces of constant almost holomorphic curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2026. Vol. 19, №2, P. 11.
<https://doi.org/10.15673/pigc.3270>.

Andrii Soloviov

postgraduate student

andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua,

[ORCID: 0009-0003-7923-6912](https://orcid.org/0009-0003-7923-6912),

Odesa I. I. Mechnikov National University,
2 Vsevolod Zmienko Street, Odesa, Ukraine, 65082

Стаття надійшла до редакції 13.07.2026

Стаття прийнята до друку 13.09.2026

Дата публікації статті 30.09.2026

For references:

A. Soloviov. (2026). On the number of independent components of a skew-symmetric tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. VIII (2). 117–130.

Для посилань:

Соловйов А. Про кількість незалежних компонент кососиметричного тензора. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. №. 2. С. 117-130.

[On the number of independent components a skew-symmetric tensor](#) © 2026 by [A. Soloviov](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал
(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Дзюба С.В.

Підписано до друку 30.09.2026 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 15,28
Наклад 50 прим. Зам. №26-18Е

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@odaba.edu.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА